Universitatea Bucureşti

M. I. Stoka ★ G. G. Vrănceanu

Culegere de probleme de geometrie analitică şi elemente de algebră liniară

Editura didactică şi pedagogică
Bucureşti - 1963

Prefață

În noul plan de învățămînt al facultăților de matematică-mecanică și al facultăților de fizică de la universități și institute pedagogice figurează cursul de Geometrie analitică și elemente de algebră liniară. Pentru a ajuta pe studenți la asimilarea acestui curs am scris această culegere de probleme, care în afara studenților de la facultățile amintite se adresează și celor de la institutele tehnice.

Problemele, complet rezolvate, au fost împărțite în opt capitole, la începutul fiecărui capitol fiind o parte introductivă, care cuprinde cele mai importante definiții și formule, folosite la rezolvarea problemelor din capitolul respectiv.

AUTORII

Capitolul I

Elemente de algebră liniară

Determinanți. Se numește determinant de ordinul n un tablou pătratic cu n^2 elemente

$$D=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix},$$

a cărui valoare este

$$D=\Sigma(-1)^I a_1^\alpha a_2^\beta \dots a_n^\lambda,$$

unde I reprezintă numărul de inversiuni ale permutării $\alpha, \beta, \dots, \lambda$.

Elementele $a_k^1, a_k^2, \dots, a_k^n$ formează linia de rangul k, iar elementele $a_1^h, a_2^h, \dots, a_n^h$ formează coloana de rangul h a determinantului.

Determinantul format prin scoaterea liniei k și a coloanei h din determinantul D se numește minorul elementului a_k^h. Dacă notăm acest minor cu A_n^k, avem

$$D=\sum_{h=1}^{n}(-1)^{h+k} a_k^h A_h^k, \quad (k=\text{indice fix}).$$

Determinanții au următoarele proprietăți:

1. Într-un determinant putem schimba liniile în coloane și coloanele în linii, fără ca valoarea determinantului să se schimbe.
2. Dacă într-un determinant schimbăm două linii (coloane) între ele, determinantul își schimbă semnul.
3. Putem da factor comun pe linii (coloane).
4. Un determinant care are două linii (coloane) proporționale este nul.

5. Dacă într-un determinant o linie (coloană) este o sumă de elemente, determinantul se descompune într-o sumă de determinanți.

Fiind dat determinantul D și determinantul

$$\Delta=\begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^n \\ b_2^1 & b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n^1 & b_n^2 & \dots & b_n^n \end{vmatrix},$$

avem

$$D\cdot\Delta=\begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 & \dots & c_1^n \\ c_2^1 & c_2^2 & \dots & c_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n^1 & c_n^2 & \dots & c_n^n \end{vmatrix},$$

unde

$$c_k^h=\sum_{i=1}^{n} a_k^i\, b_i^h.$$

Dacă notăm cu $D_{1\,2\,\dots\,p}^{r_1 r_2 \dots r_p}$ determinantul format din elementele situate în primele p linii și în coloanele $r_1, r_2, \dots, r_p$ și cu $D_{p+1,\dots,n}^{r_{p+1}\dots r_n}$ determinantul format din elementele situate în ultimele $n-p$ linii și coloanele $r_{p+1}, \dots, r_n$, atunci

$$D=\sum (-1)^m D_{1\,\dots\,p}^{r_1\cdots r_p}\; D_{p+1,\dots n}^{r_{p+1}\dots r_n},$$

unde

$$m=r_1+r_2+\dots+r_p+1+2+\dots+p.$$

Aceasta este *regula lui Laplace* pentru dezvoltarea unui determinant.

Matrice.

Se numește matrice de ordinul (m,n) un tablou dreptunghiular

$$\left\| \begin{matrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m^1 & a_m^2 & & a_m^n \end{matrix} \right\|.$$

O matrice pătratică în care elementele de pe diagonala principală sînt egale cu 1, iar celelalte sînt nule, se numește matrice unitate și se notează cu I.

O matrice în care am schimbat liniile în coloane și coloanele în linii se numește transpusa matricei date.

Fiind dată o matrice pătratică, determinantul format cu elementele matricei se numește determinantul matricei.

O matrice pătratică pentru care determinantul matricei este nul se numește matrice singulară.

Suma a două matrice de același ordin $A=\|a_k^h\|$ și $B=\|b_k^h\|$, este matricea $C=\|a_k^h+b_k^h\|$.

Fiind date două matrice $M=\|m_k^h\|$ de ordinul (m, n), și $N=\|n_j^i\|$ de ordinul (n, m), matricea

$p^k=\|p_j^h\|$, unde $p_j^h=\sum_{k=1}^{n} m_k^h n_j^k$, se numește matricea produs a matricelor M și N. Notăm $P=M\cdot N$.

Produsul a două matrice nu este comutativ.

Fiind dată o matrice pătrată nesingulară A, matricea A^{-1}, astfel încît

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I,$$

se numește inversa matricei A.

Se numește matrice echivalentă cu o matrice dată, o matrice obținută din aceasta prin una din operațiile: schimbarea a două linii (coloane) între ele; înmulțirea unei linii (coloane) cu un număr; adunarea la o linie (coloană) a unui multiplu al altei linii (coloane).

Dacă determinantul de ordinul cel mai înalt nenul care se poate forma din elementele unei matrice este m, se spune că rangul matricei este m.

Sisteme liniare.

Un sistem de forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_k^i x_i=b_k,\ (k=1,\ldots,m)$$

se numește sistem liniar. Matricea $M=\|a_k^i\|$ se numește matricea sistemului.

Fie D un determinant nenul de ordin maxim, care se poate forma cu elementele matricei M. Acest determinant se numește determinant principal. Ecuațiile sistemului ai căror coeficienți intră în determinantul D se numesc ecuații principale. Celelalte ecuații se numesc ecuații neprincipale. Determinantul format prin adăugarea la determinantul D a unei linii compuse din coeficienții ecuațiilor neprincipale și a unei coloane formate din termenii liberi corespunzători se numește determinant caracteristic.

Teorema lui Rouché. Un sistem liniar este compatibil dacă toți determinanții caracteristici sînt nuli.

Un sistem de forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_k^i \, x_i = 0, \ (k = 1, \ldots, m)$$

se numește sistem liniar omogen.

Acest sistem admite soluția banală $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Pentru ca acest sistem să admită o soluție diferită de cea banală trebuie ca rangul matricei $\| a_k^i \|$ să fie mai mic decît m.

Forme pătratice

O expresie de forma

$$F = \sum_{i,j}^{1,n} a_{ij} \, x_i \, x_j$$

se numește formă pătratică.

Printr-o transformare liniară

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j \, x_j', \ (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

se poate reduce forma pătratică F la forma

$$F = \sum_{k=1}^{p} b_k (x^k)^2,$$

numită forma canonică.

Dacă $p < n$, forma F se numește degenerată.

Dacă avem

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j \, \alpha_j^h = \delta_i^h, \ (\delta_i^h = 1 \text{ dacă } h \neq i \text{ și } \delta_i^i = 1),$$

transformarea (1) se numește ortogonală.

Ecuația

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \rho & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \rho \end{vmatrix} = 0$$

se numește ecuația caracteristică a formei F.

Coeficienții α_i^j sînt soluțiile sistemului

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \rho \delta_j^i) \, \beta_j = 0, \ (i = 1, \ldots, n)$$

pentru $\rho = \rho_j$, $(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ fiind rădăcinile ecuației caracteristice.

Probleme

1. *Considerăm determinantul*

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

și notăm cu α_{ij} *complementul algebric al elementului* a_{ij} *din acest determinant.*

Să se arate că dacă notăm

$$\Delta'=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix},$$

avem $\Delta'=\Delta^2$.

Soluție.

Vom face produsul determinanților Δ și Δ', înmulțind linii cu linii. Avem

$$\Delta\Delta'=\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{3} a_{1i}\alpha_{1i} & \sum_{i=1}^{3} a_{2i}\alpha_{1i} & \sum_{i=1}^{3} a_{3i}\alpha_{1i} \\ \sum_{i=1}^{3} a_{1i}\alpha_{2i} & \sum_{i=1}^{3} a_{2i}\alpha_{2i} & \sum_{i=1}^{3} a_{3i}\alpha_{2i} \\ \sum_{i=1}^{3} a_{1i}\alpha_{3i} & \sum_{i=1}^{3} a_{2i}\alpha_{3i} & \sum_{i=1}^{3} a_{3i}\alpha_{3i} \end{vmatrix}.$$

Dar

$$\sum_{i=1}^{3} a_{hi}\alpha_{ki}=\delta_k^h\Delta, \quad (h,k=1,2,3)$$

(δ_k^h este simbolul lui Kronecker, egal cu 1 dacă $h=k$ și cu 0 dacă $h=k$), deci

$$\Delta\Delta'=\begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix}=\Delta^3.$$

Deci aici rezultă că

$$\Delta'=\Delta^2.$$

2. *Să se arate că determinantul*

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (a-\alpha)^2 & (a-\beta)^2 & (a-\gamma)^2 \\ 1 & (b-\alpha)^2 & (b-\beta)^2 & (b-\gamma)^2 \\ 1 & (c-\alpha)^2 & (c-\beta)^2 & (c-\gamma)^2 \end{vmatrix}$$

este nul.

Soluție.

Scăzînd coloana a treia din coloana a doua, iar coloana a patra din coloana a treia, obținem

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & (\beta-\alpha)(2a-\alpha-\beta) & (\gamma-\beta)(2a-\beta-\gamma) & (a-\gamma)^2 \\ 1 & (\beta-\alpha)(2b-\alpha-\beta) & (\gamma-\beta)(2b-\beta-\gamma) & (b-\gamma)^2 \\ 1 & (\beta-\alpha)(2c-\alpha-\beta) & (\gamma-\beta)(2c-\beta-\gamma) & (c-\gamma)^2 \end{vmatrix}.$$

Dezvoltînd după linia întîi, găsim

$$D=-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)\begin{vmatrix} 1 & 2a-\alpha-\beta & 2a-\beta-\gamma \\ 1 & 2b-\alpha-\beta & 2b-\beta-\gamma \\ 1 & 2c-\alpha-\beta & 2c-\beta-\gamma \end{vmatrix}.$$

Scăzînd în acest determinant linia întîi din celelalte două, obținem determinantul

$$D=-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)\begin{vmatrix} 1 & 2a-\alpha-\beta & 2a-\beta-\gamma \\ 0 & 2(b-a) & 2(b-a) \\ 0 & 2(c-a) & 2(c-a) \end{vmatrix},$$

care avînd două linii proporționale este nul.

3. *Să se dezvolte determinantul*

$$\Delta=\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ c & x & a & b \\ b & c & x & a \\ a & b & c & x \end{vmatrix},$$

punîndu-l sub forma de produs.

Soluție.

Adunînd liniile a doua, a treia și a patra la prima linie, obținem

$$\Delta=(x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ c & x & a & b \\ b & c & x & a \\ a & b & c & x \end{vmatrix}.$$

Adunînd acum la coloana a doua prima coloană înmulțită cu i^3 $(i=\sqrt{-1})$, coloana a treia înmulțită cu i și coloana a patra înmulțită cu i^2, găsim

$$\Delta=(x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ c & x+ai+bi^2+ci^3 & a & b \\ b & xi+ai^2+bi^3+c & x & a \\ a & xi^2+ai^3+b+ci & c & x \end{vmatrix}.$$

Dar

$$xi+ai^2+bi^3+c=xi+ai^2+bi^3+ci^4=i(x+ai+bi^2+ci^3),$$
$$xi^2+ai^3+b+ci=xi^2+ai^3+bi^4+ci^5=i^2(x+ai+bi^2+ci^3),$$

deci

$$\Delta=(x+a+b+c)(x+ai-b-ci)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & a & b \\ b & i & x & a \\ a & -1 & c & x \end{vmatrix}.$$

Scăzînd în ultimul determinant coloana întîi din coloana a treia și a patra, iar apoi dezvoltînd determinantul după linia întîi, obținem

$$\Delta=(x+a+b+c)(x+ai-b-ci)\begin{vmatrix} 1 & a-c & b-c \\ i & x-b & a-b \\ -1 & c-a & x-a \end{vmatrix}.$$

Adunînd aici linia a treia la prima linie și dezvoltînd după linia întîi găsim

$$(\Delta=x+a+b+c)(x-a+b-c)(x+ai-b-ci)\begin{vmatrix} i & x-b \\ -1 & c-a \end{vmatrix},$$

de unde rezultă

$$\Delta=(x+a+b+c)(x-a+b-c)(x+ai-b-ci)(x-ai-b+ci).$$

4. *Să se calculeze determinantul*

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix},$$

punînd rezultatul sub formă de produs.

Soluție.

Metoda 1. Scăzînd coloana întîi din celelalte și dezvoltînd apoi determinantul obținut după linia întîi, obținem

$$\Delta=\begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \\ b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix}.$$

Dar

$$b^3-a^3=(b-a)(b^2+ab+a^2),\quad b^4-a^4=(b-a)(b^3+ab^2+a^2b+a^3),$$

deci

$$\Delta=(b-a)(c-a)(d-a)\times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 & d^2+ad+a^2 \\ b^3+ab^2+a^2b+a^3 & c^3+ac^2+a^2c+a^3 & d^3+ad^2+a^2d+a^3 \end{vmatrix}$$

Scăzînd acum coloana întîi din celelalte două și dezvoltînd după linia întîi, găsim

$$\Delta=(b-a)(c-a)(d-a)\times$$

$$\begin{vmatrix} c^2-b^2+a(c-b) & d^2-b^2+a(d-b) \\ c^3-b^3+a(c^2-b^2)+a^2(c-b) & d^3-b^3+a(d^2-b^2)+a^2(d-b) \end{vmatrix}$$

de unde

$$\Delta=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\times$$

$$\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+d \\ c^2+bc+b^2+a(c+b)+a^2 & d^2+bd+b^2+a(d+b)+a^2 \end{vmatrix}.$$

Scăzînd linia întîi înmulțită cu a din linia a doua, găsim

$$\Delta=(b-a)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+d \\ b^2+bc+c^2 & b^2+bd+d^2 \end{vmatrix}.$$

Scăzînd acum coloana întîi din a doua, obținem

$$\Delta=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(ab+ac+ad+bc+bd+cd).$$

Metoda 2. Determinantul Δ este un polinom simetric omogen de gradul al optulea în variabilele a,b,c,d.

Observăm că dacă două din variabile sînt egale, avem $\Delta=0$, deci determinantul Δ se divide cu produsul

$$(a-b)\ (a-c)\ (a-d)\ (b-c)\ (b-d)\ (c-d)$$

Avînd în vedere că acest produs este de gradul al şaselea, rezultă că

$$\Delta = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)\ P_2\ (a,b,c,d) \qquad (1)$$

unde $P_2\ (a,b,c,d)$ este un polinom simetric omogen de gradul al doilea, adică

$$P_2(a,b,c,d) = \alpha(a^2+b^2+c^2+d^2)+\beta\,(ab+ac+ad+bc+bd+cd).$$

Identificînd coeficientul lui bc^3d^4 din formula (1), obţinem $\alpha=0$, $\beta=1$, deci

$$\Delta=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)\,(ab+ac+ad+bc+bd+cd).$$

5. *Să se calculeze determinantul*

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{vmatrix}.$$

Soluţie.

Să calculăm pătratul lui D înmulţind linii cu linii. Avem

$$D^2=\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{vmatrix},$$

adică

$$D^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)^4,$$

deci

$$D=\varepsilon\,(a^2+b^2+c^2+d^2)^2, \quad (\varepsilon=\pm 1). \qquad (1)$$

Pentru a determina semnul expresiei din membrul al doilea, să înlocuim în relaţia (1) $a=b=c=0$, $d=1$. Pentru aceste valori avem

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-1$$

şi

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=1,$$

deci $\varepsilon=-1$, adică

$$D=-(a^2+b^2+c^2+d^2)^2,$$

6. *Dacă notăm* $D_k=\begin{vmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{vmatrix}$; *să se arate că*

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & b_4 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix}=D_1D_2D_3D_4.$$

N. Ciorănescu și M. Roșculeț

Soluție.

Schimbînd linia a doua cu a cincea și apoi coloana a doua cu a cincea, determinantul Δ se scrie

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Dezvoltînd acest determinant după regula lui Laplace, găsim

$$\Delta=D_1\begin{vmatrix} a_3 & 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & c_4 & 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Dezvoltînd acest determinant după regula lui Laplace, după liniile a treia și a patra, obținem

$$\Delta=D_1D_2\begin{vmatrix} a_3 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & b_4 \\ c_3 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & c_4 & 0 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Schimbînd aici coloana a doua cu a treia, iar apoi linia a doua cu a treia, deducem

$$\Delta = D_1 D_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & 0 & 0 \\ c_3 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 \\ 0 & 0 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

de unde rezultă

$$\Delta = D_1 D_2 D_3 D_4.$$

7. Să se arate că un determinant strîmb simetric de ordin impar exte nul.

E. Arghiriade

Soluție.

Fie determinantul

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Dacă înmulțim fiecare linie cu (-1) obținem un determinant D_1, pentru care avem

$$D_1 = (-1)^n D = -D,$$

deoarece n este impar. Dar avem

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \dots & -a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

și vedem că D_1 diferă de D prin aceea că liniile s-au schimbat în coloane și reciproc, deci $D_1 = D$. Deoarece avem $D_1 = D$ și $D_1 = 0$, deducem $D = -D$, din $D = 0$.

8. *Se dă matricea*

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

și se cere să se calculeze matricea A^{-1}.

Soluţie.

Determinantul matricei este

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

Notînd cu a_{ij} elementele matricei A şi cu α_{ij} complementii algebrici ai elementelor a_{ij} din $\det A$, avem

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}=\ 1,\ \alpha_{21}=\ 0,\ \alpha_{31}=\ 0,\ \alpha_{41}=0;\\ &\alpha_{12}=-\ 3,\ \alpha_{22}=\ 1,\ \alpha_{32}=\ 0,\ \alpha_{42}=0;\\ &\alpha_{13}=\ 11,\ \alpha_{23}=-2,\ \alpha_{33}=\ 1,\ \alpha_{43}=0;\\ &\alpha_{14}=-38,\ \alpha_{24}=\ 7,\ \alpha_{34}=-2,\ \alpha_{44}=1. \end{aligned}$$

De aici rezultă că matricea inversă A^{-1} este

$$A^{-1}=\begin{Vmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Se verifică imediat că avem

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

9. *Să se determine matricele pătratice reale de ordinul al doilea care ridicate la puterea a treia ne dau matricea unitate*

D. K. Fadeev, I. S. Sominski

Soluţie.

Fie

$$A=\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$$

matricea căutată, unde α, β, γ, δ sînt numere reale.

Condiţia dată, se scrie

$$A^3=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{1}$$

Scriind că determinanţii matricelor din cei doi membrii ai acestei egalităţi sînt egali, obţinem

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)^3=1,$$

sau, ţinînd seama că α, β, γ, δ sînt numere reale,

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1. \tag{2}$$

Calculînd matricea A^3, egalitatea (1) devine

$$\begin{Vmatrix} \alpha^3+2\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta & \alpha^2\beta+\alpha\beta\delta+\beta^2\gamma+\beta\delta^2 \\ \alpha^2\gamma+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma^2+\gamma\delta^2 & \alpha\beta\gamma+2\beta\gamma\delta+\delta^3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

de unde deducem

$$\begin{cases} \alpha^3+2\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta=1, \\ \delta^3+\alpha\beta\gamma+2\beta\gamma\delta=1, \\ \alpha^2\beta+\alpha\beta\delta+\beta^2\gamma+\beta\delta^2=0, \\ \alpha^2\gamma+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma^2+\gamma\delta^2=0. \end{cases} \tag{3}$$

Scăzînd între ele primele două și ultimile două ecuații (3), rezultă

$$\begin{cases} (\alpha^2+\alpha\delta+\beta\gamma+\delta^2)(\beta-\gamma)=0, \\ (\alpha^2+\alpha\delta+\beta\gamma+\delta^2)(\alpha-\delta)=0, \end{cases}$$

sau, ținînd seama de relația (2),

$$\begin{cases} (\alpha+\delta-1)(\alpha+\delta+1)(\beta-\gamma)=0, \\ (\alpha+\delta-1)(\alpha+\delta+1)(\alpha-\delta)=0. \end{cases} \tag{4}$$

Dacă $\alpha+\delta=1$, din ecuația (2) rezultă

$$\gamma=-\frac{\alpha^2-\alpha+1}{\beta},$$

și, înlocuind în prima ecuație (3), obținem o relație imposibilă.

Dacă $\alpha+\delta=-1$, din ecuația (2) rezultă

$$\gamma=-\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\beta},$$

iar sistemul (3) este identic satisfăcut.

Deci, în acest caz avem matricea

$$A=\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ -\dfrac{\alpha^2+\alpha+1}{\beta} & -\alpha-1 \end{Vmatrix}.$$

Dacă $\alpha+\delta\neq\pm1$, din ecuațiile (4) deducem

$$\alpha=\delta,\ \beta=\gamma,$$

care înlocuite în sistemul (3) ne dau

$$\alpha(\alpha^2+3\beta^2)=1,\ \beta(3\alpha^2+\beta^2)=0,$$

de unde rezultă $\beta=\gamma=0$, $\alpha=\delta=1$, valori care verifică relațiile (3).

Deci, în acest caz avem matricea unitate.

10. *Să se determine matricele necunoscute X, Y din ecuațiile*

$$X.\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}. Y = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

Soluție.

Dacă notăm

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{Vmatrix},$$

ecuațiile matriciale (1) și (2) se scriu

$$X \cdot A = B \tag{1'}$$

$$A \cdot Y = B. \tag{2'}$$

Înmulțind la dreapta ecuația (1') cu matricea inversă A^{-1}, obținem

$$X = B \cdot A^{-1}. \tag{3}$$

Notînd cu α_{ij} complementii algebrici ai elementelor determinantului det A, avem

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \alpha_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \alpha_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\alpha_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \alpha_{22} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \alpha_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\alpha_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \alpha_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

De asemenea avem

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

deci matricea inversă A^{-1} este

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Înlocuind această valoare în formula (3), găsim

$$X=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

sau, efectuînd produsul celor două matrice,

$$X=\begin{Vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & -2 \end{Vmatrix}.$$

Înmulțind ecuția (2') la stînga cu matricea A^{-1}, rezultă

$$Y=A^{-1}B,$$

sau, avînd în vedere expresia matricei A^{-1}, deducem

$$Y=\begin{Vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 4 & 6 & 8 \end{Vmatrix}.$$

11. *Să se determine matricele necunoscute X, Y din sistemul de ecuații matriciale*

$$\begin{cases} X\cdot\begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{Vmatrix}+Y\cdot\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{Vmatrix}, \\ X\cdot\begin{Vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}+Y\cdot\begin{Vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 4 \end{Vmatrix}. \end{cases} \tag{1}$$

Soluție.

Notînd

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{Vmatrix},$$

$$A_1=\begin{Vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix},\quad B_1=\begin{Vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix},\quad C_1=\begin{Vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 4 \end{Vmatrix},$$

sistemul (1) se scrie

$$\begin{cases} X\cdot A+Y\cdot B=C, \\ X\cdot A_1+Y\cdot B_1=C_1. \end{cases} \tag{1'}$$

Înmulțind la dreapta, prima ecuație cu B^{-1}, iar a doua ecuație cu B_1^{-1}, obținem

$$\begin{cases} X \cdot AB^{-1} + Y = CB^{-1}, \\ X \cdot A_1B_1^{-1} + Y = C_1B_1^{-1} \end{cases}$$

de unde, scăzînd aceste ecuații, avem

$$X(AB^{-1} - A_1B_1^{-1}) = CB^{-1} - C_1B_1^{-1}. \tag{2}$$

Calculînd inversele matricelor A, B, A_1, B_1, găsim

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}, \quad A_1^{-1} = \begin{Vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{Vmatrix}, \quad B_1^{-1} = \begin{Vmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Avem

$$AB^{-1} = \begin{Vmatrix} -4 & -3 \\ 11 & 8 \end{Vmatrix}, \quad A_1B_1^{-1} = \begin{Vmatrix} -11 & -6 \\ -9 & -5 \end{Vmatrix},$$

$$CB^{-1} = \begin{Vmatrix} 8 & 5 \\ 12 & 9 \end{Vmatrix}, \quad C_1B_1^{-1} = \begin{Vmatrix} -19 & -11 \\ -8 & -4 \end{Vmatrix},$$

deci

$$AB^{-1} - A_1B_1^{-1} = \begin{Vmatrix} 7 & 3 \\ 20 & 13 \end{Vmatrix}, \quad CB^{-1} - C_1B_1^{-1} = \begin{Vmatrix} 27 & 16 \\ 20 & 13 \end{Vmatrix}.$$

Cu aceste valori ecuația (2) se scrie

$$X \cdot \begin{Vmatrix} 7 & 3 \\ 20 & 12 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 27 & 16 \\ 20 & 13 \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Inversa matricei $AB^{-1} - A_1B_1^{-1}$ este

$$(AB^{-1} - A_1B_1^{-1})^{-1} = \frac{1}{31} \begin{Vmatrix} 13 & 3 \\ -20 & -7 \end{Vmatrix}.$$

Înmulțind la dreapta ecuația (3) cu această matrice, obținem

$$X = \frac{1}{31} \begin{Vmatrix} 27 & 16 \\ 20 & 13 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 13 & -3 \\ -20 & 7 \end{Vmatrix},$$

adică

$$X = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Analog găsim

$$Y = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

12. *Să se aducă matricea*

$$M=\begin{Vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$$

la forma diagonală.

Soluție.

Adunînd prima coloană înmulțită cu —3 la a doua, înmulțită cu 2 la a treia, înmulțită cu —4 la a patra, înmulțită cu —1 la a cincea, iar apoi dînd factor comun pe ultima coloană pe 2, găsim

$$M\sim\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 1 & -7 & 1 \\ -1 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ -3 & 13 & -5 & 14 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Adunînd linia întîi înmulțită cu 2 la a doua, înmulțită cu 1 la a treia. înmulțită cu 3 la a patra, iar apoi schimbînd coloana a doua cu a patra, deducem

$$M\sim\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & 14 & 13 \end{Vmatrix}.$$

Scăzînd coloana a doua din a treia și a patra din a cincea, iar apoi a doua înmulțită cu —7 din a patra, găsim

$$M\sim\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & -8 & 35 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Scăzînd linia a doua din a treia și linia a doua înmulțită cu 3 din a patra, iar apoi dînd factor comun pe coloana a treia pe 2, obținem

$$M\sim\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 35 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Scăzînd din coloana a patra coloana a treia înmulțită cu 8 și din coloana a cincea coloana a treia înmulțită cu 4, iar apoi adunînd la ultima iinie linia a treia înmulțită cu 4, găsim

$$M\sim\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 67 & 15 \end{Vmatrix}.$$

Dînd factor comun pe coloana a patra pe 67, iar pe coloana a cincea pe 15, iar apoi scăzînd coloana a patra din a cincea, rezultă

$$M \sim \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

De aici deducem că rangul matricii M' este patru.

13. *Să se discute și să se rezolve sistemul*

$$\begin{cases} (2\lambda+1)x+(\lambda+1)y+3\lambda z=\lambda, \\ (2\lambda-1)x+(\lambda-2)y+(2\lambda-1)z=\lambda+1, \\ 3\lambda x+2\lambda y+(4\lambda-1)z=1, \end{cases} \tag{1}$$

unde λ *este un parametru.*

Soluție.

Determinantul sistemului este

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2\lambda+1 & \lambda+1 & 3\lambda \\ 2\lambda-1 & \lambda-2 & 2\lambda-1 \\ 3\lambda & 2\lambda & 4\lambda-1 \end{vmatrix}.$$

Scăzînd linia întîi din a treia și dînd factor comun pe ultima linie pe $\lambda-1$, găsim

$$\Delta=(\lambda-1)\begin{vmatrix} 2\lambda+1 & \lambda+1 & 3\lambda \\ 2\lambda-1 & \lambda-2 & 2\lambda-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Scăzînd acum coloana întîi din celelalte două și dezvoltînd după ultima linie, obținem

$$\Delta=(\lambda-1)\begin{vmatrix} -\lambda & \lambda-1 \\ -\lambda-1 & 0 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1).$$

Pentru $\lambda=1$ sistemul (1) se scrie

$$3x+2y+3z=1, \quad x-y+z=2, \quad 3x+2y+3z=1$$

și se vede imediat că doar două ecuații sînt independente, și anume

$$3x+2y+3z=1, \quad x-y+z=2.$$

Sistemul este deci compatibil, dar nedeterminat. Soluția lui este

$$x=1-z, \quad y=-1.$$

Dacă $\lambda=-1$, sistemul (1) se scrie

$$x+3z=1, \quad x+y+z=0, \quad 3x+2y+5z=-1.$$

Matricea coeficienților este

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Rangul acestei matrice este doi. Determinantul

$$D=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}=1$$

este determinantul principal al sistemului.

Determinantul caracteristic este

$$D_c=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{Vmatrix}=-2\neq 0,$$

deci în acest caz sistemul este incompatibil.

Dacă $\lambda\neq\pm 1$ avem $\Delta\neq 0$, deci sistemul este compatibil și cu soluție unică. Rezolvînd cu regula lui Cramer, găsim

$$x=\frac{\lambda(2\lambda-7)}{\lambda^2-1},\quad y=-\frac{3\lambda}{\lambda+1},\quad z=\frac{4\lambda+1}{\lambda^2-1}.$$

14. *Să se discute și să se rezolve sistemul*

$$\begin{cases} y+z+\lambda t=a, \\ z+t+\lambda x=b, \\ t+x+\lambda y=c, \\ x+y+\lambda z=d. \end{cases} \tag{1}$$

Soluție.

Matricea coeficienților necunoscutelor este

$$M=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 0 \end{Vmatrix}.$$

Determinantul acestei matrice este

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 0 \end{vmatrix}.$$

Adunînd liniile a doua, a treia și a patra la prima și dînd factor comun pe $\lambda+2$, obținem

$$D=(\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

Scăzînd acum linia întîi din linia a doua și a treia și dezvoltînd apoi după elementele ultimei coloane, găsim

$$D=-(\lambda+2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-1 & -1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}.$$

Adunînd linia întîi la linia a treia și dînd factor comun pe λ, obținem

$$D=-\lambda(\lambda+2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix},$$

de unde

$$D=-\lambda(\lambda+2)[(\lambda-1)^2+1].$$

Dacă $\lambda\neq 0,-2$ avem $D\neq 0$, deci sistemul (1) este compatibil, avînd soluția unică

$$x=\frac{(\lambda^2+1)a-(\lambda^3-\lambda+1)b-(2\lambda-1)c+(\lambda^2-\lambda-1)d}{\lambda(\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda+2)},$$

$$y=\frac{(\lambda^2+1)b-(\lambda^3-\lambda+1)c-(2\lambda-1)d+(\lambda^2-\lambda-1)a}{\lambda(\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda+2)},$$

$$z=\frac{(\lambda^2+1)c-(\lambda^3-\lambda+1)d-(2\lambda-1)a+(\lambda^2-\lambda-1)b}{\lambda(\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda+2)},$$

$$t=\frac{(\lambda^2+1)d-(\lambda^3-\lambda+1)a-(2\lambda-1)b+(\lambda^2-\lambda-1)c}{\lambda(\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda+2)}.$$

Dacă $\lambda=0$ avem $D=0$. In acest caz luăm ca determinant principal

$$D_1=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Determinantul caracteristic al sistemului este

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1 & b\\ 1 & 0 & 0 & c\\ 1 & 1 & 0 & d\end{vmatrix}=-a+b-c+d.$$

Deci, dacă $a+c\neq b+d$, sistemul (1) este incompatibil.

Dacă $a+c=b+d$, sistemul este compatibil și avem o simplă infinitate de soluții, și anume

$$x=c-k,\ y=a-b+k,\ z=b-k,\ t=k,$$

unde k este un parametru variabil.

Dacă $\lambda=-2$ avem $D=0$. In acest caz luăm ca determinant principal al sistemului

$$D_2=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=5\neq 0.$$

Determinantul caracteristic este

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ -2 & 0 & 1 & b \\ 1 & -2 & 0 & c \\ 1 & 1 & -2 & d \end{vmatrix}=5(a+b+c+d).$$

Dacă $a+b+c+d\neq 0$, sistemul (1) este incompatibil.

Dacă $a+b+c+d=0$, sistemul este compatibil și avem o simplă infinitate de soluții, și anume

$$x=\frac{2a-2b+c}{5}+k,\ y=\frac{a-b-2c}{5}+k,\ z=\frac{4a+b+2c}{5}+k,\ t=k,$$

unde k este un parametru variabil.

15. *Să se discute și să se rezolve sistemul de ecuații liniare*

$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ (\lambda-1)x+2y+3z=1, \\ 3x-y-z=-\lambda, \\ 2x-y+\lambda z=-1, \end{cases} \tag{1}$$

unde λ este un parametru variabil.

Soluție.

Pentru ca acest sistem să fie compatibil trebuie ca determinantul format cu toți coeficienții să fie nul, adică

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ \lambda-1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -\lambda \\ 2 & -1 & \lambda & -1 \end{vmatrix}=0.$$

Dezvoltînd acest determinant, obținem ecuația

$$\lambda^3-4\lambda^2-14\lambda-4=0,$$

care admite rădăcinile

$$\lambda_1=-2,\ \lambda_2=3-\sqrt{11},\ \lambda_3=3+\sqrt{11}.$$

Deci, pentru $\lambda\neq -2,3\pm\sqrt{11}$ sistemul (1) este incompatibil.
Pentru $\lambda=-2$ și $\lambda=3\pm\sqrt{11}$ sistemul (1) este compatibil.

Rezolvînd, în acest caz, sistemul format din prima, a treia și a patra ecuație (1), obținem soluția

$$x=\frac{2-\lambda}{4},\quad \lambda=\frac{\lambda^2+4\lambda+8}{4(\lambda+1)},\quad z=\frac{3\lambda-2}{4(\lambda+1)}.$$

16. *Să se discute și să se rezolve sistemul*

$$\begin{cases} x+y+z=5,\\ x+y-z=\alpha,\\ 2x-y-3z=-3,\\ 3x+\alpha(\alpha+1)y-4z=\alpha-1,\\ x+2\beta y-2z=2(\beta-1). \end{cases} \tag{1}$$

Soluție.

Matricea coeficienților sistemului este

$$M=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & -3\\ 3 & \alpha(\alpha+1) & -4\\ 1 & 2\beta & -2 \end{Vmatrix}.$$

Avem

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}=6\neq 0,$$

deci de rang $M=3$ și putem lua ca determinant principal al sistemului determinantul D.

Pentru ca sistemul să fie compatibil trebuie ca cei doi determinanți caracteristici să fie nuli.

Avem

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5\\ 1 & 1 & -1 & \alpha\\ 2 & -1 & -3 & -3\\ 3 & \alpha(\alpha+1) & -4 & \alpha-1 \end{vmatrix}=(\alpha-1)(5\alpha^2+11\alpha+12)=0.$$

De aici rezultă că $\alpha=1$.

Cu această valoare a lui α, al doilea determinant caracteristic este

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2\beta & -2 & 2\beta-2 \end{vmatrix}=16(1-2\beta)=0,$$

adică $\beta=\frac{1}{2}$.

Deci, sistemul (1) este compatibil dacă $\alpha=1$, $\beta=\frac{1}{2}$. În acest caz, sistemul format din primele trei ecuații (1) are soluția $x=2, y=1, z=2$.

17. *Să se determine parametrul* λ *astfel încît sistemul liniar și omogen*

$$\begin{cases} x+(\lambda+1)y+z+t=0. \\ 2x+y+\lambda z+2t=0, \\ (3\lambda-2)x+2y+2z+t=0, \\ x+y+z+t=0. \end{cases} \tag{1}$$

să admită soluții diferite de cea banală și, în acest caz, să se rezolve sistemul.

Soluție.

Determinantul sistemului este

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \lambda & 2 \\ 3\lambda-2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Scăzînd ultima coloană din celelalte și dezvoltînd apoi determinantul după prima coloană, obținem $\Delta=3\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$.

De aici rezultă că sistemul (1) admite soluții diferite de cea banală dacă $\lambda=0$, $\lambda=1$ $\lambda=2$.

Dacă $\lambda=0$ coeficienții necunoscutelor x,y,z din primele trei ecuații (1) formează un determinant nenul, și anume

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=4.$$

Rezolvînd sistemul format din primele trei ecuații (1), obținem

$$x=-\frac{t}{4},\quad y=-\frac{3t}{2},\quad z=\frac{3t}{4}.$$

Dacă $\lambda=1$, coeficienții necunoscutelor x,y,z din primele trei ecuații (1) formează determinantul nenul

$$D_2=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&2&2\end{vmatrix}=-3.$$

Sistemul format din primele trei ecuații (1) are în acest caz soluția $x=-t$, $y=z=0$.

Dacă $\lambda=2$ obținem în același mod soluția $x=\frac{t}{2}$, $y=0$, $z=-\frac{3t}{2}$.

18. *Să se discute și să se rezolve sistemul*

$$\begin{cases}x-y+z=2,\\2y+y-4z=4,\\x+(\lambda+1)y-z=6,\\2x-3y+(2\lambda-1)z=1,\\(2-\lambda)x+y-3z=2.\end{cases}$$

Soluție.

Matricea coeficienților acestui sistem este

$$M=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&1&-4\\1&\lambda+1&-1\\2&-3&2\lambda-1\\2-\lambda&1&-3\end{vmatrix}.$$

Să considerăm determinantul

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&1&-4\\1&\lambda+1&-1\end{vmatrix}=6(\lambda+1).$$

Pentru $\lambda\neq-1$ avem $D\neq0$ și deci rangul matricei M este trei. În acest caz putem lua determinantul D ca determinant principal al sistemului.

Primul determinant caracteristic este

$$D_1=\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\2&1&-4&4\\1&\lambda+1&-1&6\\2&-3&2\lambda-1&1\end{vmatrix}=42(1-\lambda).$$

Dacă $\lambda=1$ avem $D_1=0$. Pentru această valoare, al doilea determinant caracteristic al sistemului este

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

deci sistemul este compatibil.

Dacă $\lambda\neq\pm1$, sistemul este incompatibil.

In cazul în care $\lambda=-1$, determinantul format din linia întîi, a treia și a patra a matricei M este

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix}=-7.$$

deci rangul matricei este trei și putem lua ca determinant principal al sistemului determinantul Δ. Calculînd în acest caz determinanții caracterietici ai sistemului, obținem valori diferite de zero, deci sistemul este incompatibil.

Rezută că pentru $\lambda\neq1$ sistemul este incompatibil, iar pentru $\lambda=1$ el este compatibil avînd soluția unică $x=3$, $y=2$, $z=1$.

19. *Se consideră transformările liniare*

$$(T_1):\ x'=3x+3y+2z,\ y'=x-y=z,\ z'=2x+3y+z,$$

$$(T_2):\ x'=-4x-y=4z,\ y'=x-z,\ z'=5x+2y-4z$$

și se cere să se găsească expresia transformării $T_1\cdot T_2$.

Soluție.

Matricele celor două transformări sînt

$$M_1=\begin{Vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{Vmatrix},\quad M_2=\begin{Vmatrix} -4 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & -4 \end{Vmatrix}.$$

Matricea transformării $T_1\cdot T_2$ este

$$M_1\cdot M_2=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

deci transformatoarea $T_1\cdot T_2$.

$$x'=x+y+z,\quad y'=y+z,\quad z'=z.$$

De aici rezultă imediat că transformarea inversă $(T_1\cdot T_2)^{-1}$ este

$$x=x'-y',\ y=y'-Z',Z=Z'.$$

20. *Să se stabilească formulele de transformare ale coordonatelor, cînd se trece de la baza*

$$e_1\,(1,\,0,\,0,\,0),\ e_2\,(0,\,1,\,0,\,0),\ e_3\,(0,\,0,\,1,\,0),\ e_4\,(0,\,0,\,0,1)$$

la baza

$$e'_1(1,1,1,1),\ e'_2\,(1,1,-1,-1),\ e'_3\,(1,-1,-1,\,1),\ e'_4(1,-1,1,-1).$$

R. Cristescu

Soluție.

Fie x_1, x_2, x_3, x_4 coordonatele unui punct oarecare al spațiului raportat la prima bază și $x'_1, x'_2, x'_3\ x'_4$ coordonatele unui punct oarecare al spațiului raportat la a doua bază. Transformarea de coordonate este dată de formulele

$$x_i=\sum_{j=1}^{4}\alpha_{ji}\,x'_j,\ (i=1,2,3,4). \tag{1}$$

Prin aceste formule vectorii celor două baze sînt legați prin formulele

$$e'_i=\sum_{j=1}^{4}\alpha_{ij}\,e_j,\ (i=1,2,3,4). \tag{2}$$

Pentru $i=1$ această formulă se scrie

$$e'_1=\alpha_{11}\,e_1+\alpha_{12}\,e_2=\alpha_{13}\,e_3+\alpha_{14}\,e_4,$$

sau, ținînd seama de expresiile vectorilor e_i, e'_i.

$$(1,1,1,1,)=\alpha_{11}(1,\,0,\,0,\,0)+\alpha_{12}(0,\,1,\,0,\,0)+\alpha_{13}(0,\,0,\,1,\,0)+\alpha_{14}(0,0,0,1).$$

De aici rezultă

$$\alpha_{11}=\alpha_{12}=\alpha_{13}=\alpha_{14}=1.$$

Analog, făcînd în formula (2) pe i egal cu 2, 3, 4, găsim

$$\alpha_{21}=\alpha_{22}=1,\ \alpha_{23}=\alpha_{24}=-1,$$
$$\alpha_{31}=\alpha_{34}=1,\ \alpha_{32}=\alpha_{33}=-1,$$
$$\alpha_{41}=\alpha_{43}=1,\ \alpha_{42}=\alpha_{44}=-1.$$

Transformarea de coordonate căutată este deci

$$\begin{cases} x_1=x'_1+x'_2+x'_3+x'_4,\\ x_2=x'_1+x'_2-x'_3-x'_4,\\ x_3=x'_1-x'_2-x'_3+x'_4,\\ x_4=x'_1-x'_2+x'_3-x'_4, \end{cases}$$

21. *Să se reducă la o formă canonică forma pătratică*

$$F=5x^2-y^2+z^2+4xy+6xz.$$

Soluție.

Metoda 1. Luăm variabila z ca variabilă directoare. Avem

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z}=z+3x.$$

Deci,

$$F=(z+3x)^2-9x^2+5x^2-y^2+4xy,$$

sau

$$F=(z+3x)^2-4x^2-y^2+4xy,$$

adică

$$F=-(2x-y)^2+(3x+z)^2.$$

Făcînd deci substituția

$$x=X, \quad 2x-y=Y, \quad 3x+z=Z,$$

forma pătratică F devine

$$F=-Y^2+Z^2.$$

Metoda 2. Vom face reducerea cu ajutorul unei transformări ortogonale.

Ecuația caracteristică este

$$\begin{vmatrix} 5-\rho & 2 & 3 \\ 2 & -1-\rho & 0 \\ 3 & 0 & 1-\rho \end{vmatrix}=0,$$

sau

$$\rho^3-5\rho^2-14\rho=0,$$

avînd rădăcinile $\rho_1=0$, $\rho_2=-2$, $\rho_3=7$.

Coeficienții transformării ortogonale sînt soluții ale sistemului

$$\begin{cases} (5-\rho)\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=0, \\ 2\alpha_1-(1+\rho)\alpha_2=0, \\ 3\alpha_1+(1-\rho)\alpha_3=0, \end{cases} \tag{1}$$

unde ρ ia valorile ρ_1, ρ_2, ρ_3.

Pentru $\rho=0$ sistemul (1) are soluția

$$\alpha_1=\lambda, \quad \alpha_2=2\lambda, \quad \alpha_3=-3\lambda,$$

sau, normalizînd,

$$\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}. \tag{2}$$

Pentru $\rho=-2$ sistemul (1) are soluția

$$\alpha_1=\lambda, \quad \alpha_2=-2\lambda, \quad \alpha_3=-\lambda,$$

sau, normalizînd și ținînd seama că această soluție trebuie să fie ortogonală cu soluția (2),

$$\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Pentru $\rho = 7$ obținem soluția

$$\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}.$$

Deci, transformarea ortogonală este

$$\begin{cases} x = \frac{x'}{\sqrt{14}} + \frac{y'}{\sqrt{6}} + \frac{4z'}{\sqrt{21}}, \\ y = \frac{2x'}{\sqrt{14}} - \frac{2y'}{\sqrt{6}} + \frac{z'}{\sqrt{21}}, \\ z = -\frac{3x'}{\sqrt{14}} - \frac{y'}{\sqrt{6}} + \frac{2z'}{\sqrt{21}}. \end{cases}$$

Prin această transformare forma F devine

$$F = -2y'^2 + 7z'^2$$

22. *Să se reducă la o formă canonică, printr-o transformare ortogonală, forma pătratică*

$$F = 2(xy + yz + zx).$$

T. Popoviciu

Soluție.

Ecuația caracteristică a formei F este

$$\rho^3 - 3\rho - 2 = 0$$

și are rădăcinile

$$\rho_1 = \rho_2 = -1, \ \rho_3 = 2.$$

Coeficienții transformării ortogonale sînt determinați de sistemul

$$\begin{cases} -\rho\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - \rho\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \rho\alpha_3 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

unde ρ ia valorile ρ_1, ρ_2, ρ_3.

Pentru $\rho = 2$, sistemul (1) are soluția

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3,$$

sau normalizînd

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{2}$$

Pentru $\rho = -1$ sistemul (1) se reduce la ecuația

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \tag{3}$$

Fie

$$\beta_1, \beta_2, -(\beta_1 + \beta_2) \tag{4}$$

și

$$\gamma_1, \gamma_2, -(\gamma_1 + \gamma_2) \tag{5}$$

două soluții ale ecuației (3).

Punînd condiția de ortogonalitate pentru soluțiile (2) și (4). găsim $\beta_3 = -\beta_1$.

Deci, soluția (4) ortogonală soluției (2) și normală este

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0. \tag{4'}$$

punînd condiția ca soluțiile (4') și (5) să fie ortogonale, obținem $\gamma_1 = \gamma_2$. deci soluția normalizată este

$$\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Transformarea ortogonală căutată este deci

$$\begin{cases} x = \frac{x'}{\sqrt{3}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} + \frac{z'}{\sqrt{6}}, \\ y = \frac{x'}{\sqrt{3}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} + \frac{z'}{\sqrt{6}}, \\ z = \frac{x'}{\sqrt{3}} - \frac{2z'}{\sqrt{6}}. \end{cases}$$

Prin această transformare forma pătratică F devine

$$F = 2x'^2 - y'^2 - z'^2.$$

23. *Să se reducă la o formă canonică, printr-o transformare ortogonală, forma pătratică*

$$F = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx.$$

C. Iacob

Soluție.

Ecuația caracteristică a formei F este

$$(\rho + 1)(\rho - 2)^2 = 0,$$

avînd rădăcinile $\rho_1 = -1$, $\rho_2 = \rho_3 = 2$.

Coeficienții transformării ortogonale sînt soluțiile sistemului

$$\begin{cases} (1 - \rho)\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 + (1 - \rho)\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 - \alpha_2 + (1 - \rho)\alpha_3 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

ρ luînd valorile ρ_1, ρ_2, ρ_3.

Pentru $\rho = -1$ sistemul (1) are soluția $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, sau, normalizînd,

$$\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{2}$$

Pentru $\rho = 2$ sistemul (1) se reduce la ecuația

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Fie

$$\beta_1, \beta_2, -(\beta_1+\beta_2) \tag{3}$$

și

$$\gamma_1, \gamma_2, -(\gamma_1+\gamma_2) \tag{4}$$

două soluții ale acestei ecuații.

Scriind că determinantul

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \beta_1 & \gamma_1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \beta_2 & \gamma_2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\beta_1-\beta_2 & -\gamma_1-\gamma_2 \end{vmatrix}$$

este ortogonal, obținem

$$\beta_1=-\beta_2=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \gamma_1=\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{6}},$$

deci transformarea căutată este

$$\begin{cases} x=\frac{x'}{\sqrt{3}}-\frac{y'}{\sqrt{2}}+\frac{z'}{\sqrt{6}}, \\ y=\frac{x'}{\sqrt{3}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}+\frac{z'}{\sqrt{6}}, \\ z=\frac{x'}{\sqrt{3}}-\frac{2z'}{\sqrt{6}}. \end{cases}$$

Prin această transformare forma F devine

$$F=-x'^2+\frac{5}{3}y'^2+2z'^2.$$

24. *Să se reducă la o formă canonică, forma pătratică*

$$F=3x^2-y^2+z^2+t^2+6xy-2xz-2yz+4tx+6ty+2tz.$$

Soluție.

Luăm ca variabilă directoare pe x. Avem

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}=3x+3y-z+2t,$$

deci

$$F=\frac{1}{3}(3x+3y-z+2t)^2-4y^2+\frac{2}{3}z^2-\frac{1}{3}t^2+2yt+\frac{10}{3}zt.$$

Notăm

$$F_1=4y^2+\frac{2}{3}z^2-\frac{1}{3}t^2+2yt+\frac{10}{3}zt$$

și în această nouă formă pătratică luăm pe y ca variabilă directoare. Avem

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F_1}{\partial y}=-4y+t.$$

Deci,

$$F_1=-\frac{1}{4}(t-4y)^2+\frac{2}{3}z^2-\frac{1}{12}t^2+\frac{10}{3}zt.$$

Considerăm acum forma pătratică

$$F_2=\frac{2}{3}z^2-\frac{1}{12}t^2+\frac{10}{3}zt$$

și luăm aici pe z ca variabilă directoare. Avem

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F_2}{\partial z}=\frac{2}{3}z+\frac{5}{3}t,$$

de unde rezultă

$$F_2=\frac{1}{6}(2z+5t)^2-\frac{51}{12}t^2.$$

Deducem

$$F=\frac{1}{3}(3x+3y-z+2t)^2-\frac{1}{4}(4y-t)^2+\frac{1}{6}(2z+5t)^2-\frac{51}{12}t^2.$$

Deci, prin substituția

$$\begin{cases} X=3x+3y-z+2t, & Y=4y-t, \\ Z=2z+5t, & T=t, \end{cases}$$

forma pătratică F devine

$$F=\frac{1}{3}X^2-\frac{1}{4}Y^2+\frac{1}{6}Z^2-\frac{51}{12}T^2.$$

25. *Să se transforme forma pătratică*

$$F=9x^2-6y^2-8z^2+6xy-14xz+18xu+8yz+12yu-4zu$$

într-o sumă de pătrate.

Vera Myller-Lebedev

Soluție.

Luăm pe x ca variabilă directoare. Avem

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X}=9x+3y-7z+9u,$$

deci

$$F=\left(3x+y-\frac{7}{3}z+3u\right)^2-7y^2-\frac{121}{9}z^2-9u^2+\frac{38}{3}yz+6yu+10zu.$$

Notăm

$$F_1=7y^2+\frac{121}{9}z^2+9u^2-\frac{38}{3}yz-6yu-10zu$$

și luăm aici ca variabilă directoare pe u. Avem

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F1}{\partial u}=9u-3y-5z,$$

deci

$$F_1=\left(3u-y-\frac{5}{3}z\right)^2+6y^2+\frac{32}{3}z^2-16yz,$$

sau

$$F_1=\left(3u-y-\frac{5}{3}z\right)^2+\frac{2}{3}(3y-4z)^2.$$

Forma F se scrie

$$F=\left(3x+y-\frac{7}{3}z+3u\right)^2-\left(3u-y-\frac{5}{3}z\right)^2-\frac{2}{3}(3y-4z)^2$$

26. *Să se reducă la o formă canonică forma pătratică*

$$F=2\ (xy+yz+zt+tx).$$

Soluție.

Avînd în vedere că toți coeficienții a_{ii} ai formei sînt nuli, facem substituția

$$x=x'+y',\ y=x'-y',\ z=z',\ t=t'. \tag{1}$$

Cu aceasta forma F devine

$$F=2\ (x'^2-y'^2+x'z'+x't'-y'z'+y't'+z't').$$

Luăm acum ca variabilă directoare pe x'. Avem

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}=2x'+z'+t'.$$

Deci,

$$F=\frac{1}{2}(2x'+z'+t')^2-y'^2-\frac{1}{2}z'^2-\frac{1}{2}t'^2-2y'z'+-2y't'+z't'. \tag{2}$$

Notăm

$$F_1=y'^2+\frac{1}{2}z'^2+\frac{1}{2}t'^2+2y'z'-2y't'-z't'.$$

Luînd aici pe y' ca variabilă directoare, avem

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F_1}{\partial y'}=y'+z'-t',$$

deci

$$F_1=(y'+z'-t')^2-\frac{1}{2}z'^2-\frac{1}{2}t'^2+z't',$$

adică

$$F_1=(y'+z'-t')^2-\frac{1}{2}(z'-t')^2.$$

Inlocuind această expresie în (2), găsim

$$F=\frac{1}{2}(2x'+z'+t')^2-(y'+z'-t')^2+\frac{1}{2}(z'-t')^2.$$

Vom face substituția

$$2x'+z'+t'=X,\ y'+z'-t'=Y,\ z'-t'=Z,\ t'=T.$$

Deci, prin substituția

$$X=x+y+z+t,\ Y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+z-t,\ Z=z-t,\ T=t$$

Forma F devine

$$F=\frac{1}{2}X^2-Y^2+\frac{1}{2}Z^2.$$

Capitolul II 14 pr.

Dreapta în plan

Considerăm un sistem de axe Ox, Oy, care fac între ele un unghi θ. Ecuația

$$Ax+By+C=0$$

reprezintă o dreaptă. Această ecuație se numește ecuația generală a dreptei.

Alte forme ale ecuației dreptei sînt:

ecuația explicită: $y=mx+n$;

ecuația prin tăieturi: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$;

ecuația tangențială: $ux+vy+l=0$;

ecuația normală: $x\cos\varphi+y\cos(\theta-\varphi)-p=0$.

Ecuațiile parametrice ale dreptei sînt

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

unde $M(x_1, y_1)$ și $N(x_2, y_2)$ sînt două puncte ale dreptei.

Ecuația dreptei care trece prin punctele M și N este

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Fiind date două drepte

$$(d_1): y=m_1x+n_1, \quad (d_2): y=m_2x+n_2,$$

dacă notăm cu V unghiul dintre ele, avem

$$\operatorname{tg} V=\frac{(m_1-m_2)\sin\theta}{1+(m_1-m_2)\cos\theta-m_1m_2}.$$

Condiția ca dreptele d_1 și d_2 să fie paralele este $m_1=m_2$, iar condiția ca ele să fie perpendiculare este

$$m_1m_2+(m_1+m_2)\cos\theta+1=0.$$

Distanța dintre punctele M și N este

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\cos\theta}.$$

Distanța de la punctele $P\ (x_0,\ y_0)$ la dreapta (1) este

$$d=\left|\frac{(Ax_0+By_0+C)\sin\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}}\right|$$

Fiind date dreptele

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2=0,$$

ecuația fasciculului de drepte care trec prin punctul de intersecție al lor este

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0.$$

Fiind date patru drepte

$$y=m_ix+n_i,\ \ (i=1,2,3,4),$$

ele formează un fascicul armonic dacă

$$2(m_1m_2+m_3m_4)=(m_1+m_2)(m_3)+m_4).$$

Probleme

1. *Se consideră două drepte perpendiculare Ox, Oy și o dreaptă care le întîlnește în A, respectiv în B. Notăm cu C proiecția lui O pe dreapta AB, cu M și N proiecțiile lui C pe Ox, respectiv Oy, cu D punctul în care dreapta CM intersectează paralela dusă prin B la Ox și cu E punctul în care dreapta CN intersectează paralela dusă prin A la Oy.*

Se cere:

1° Să se arate că coeficientul unghiular al dreptei DE este cubul coeficientului unghiular al dreptei AB

2° Să se arate că dreptele AB, DE și ME sînt concurente.

Soluție.

1° Punctele A și B au coordonatele $a,\ o$, respectiv $o,\ b$.

Dreapta AB are ecuația

$$(AB):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$$

și deci proiecția lui O pe această dreaptă este $C\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\ \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$.

Proiecțiile lui C pe axele Ox, Oy sînt $M\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\ 0\right)$ și $N\left(0,\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)$.

Punctele D și E au coordonatele

$$D\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},b\right),\ E\left(a,\frac{a^2b}{a^2+b^2}\right).$$

Dreapta DE are ecuația

$$(DE): \frac{(a^2+b^2)(x-a)}{-a^3} = \frac{(a^2+b^2)(y-a^2b)}{b},$$

deci

$$m_{DE} = \left(-\frac{b}{a}\right)^3,$$

adică

$$m_{DE} = (m_{AB})^3$$

2° Ecuația dreptei MN este

$$(MN): \frac{a^3+b^2}{ab^2}x + \frac{a^2+b^2}{a^2b}y - 1 = 0.$$

Ecuațiile dreptelor AB, DE și MN se mai pot scrie

$$\begin{cases} bx+ay-ab=0, \\ (a^3+b^2)(b^3x+a^3y)-ab(a^4+a^2b^2+b^4)=0, \\ (a^2+b^2)(ax+by)-a^2b^2=0. \end{cases}$$

Notăm cu d_1, d_2, d_3 membrii întîi ai acestor trei ecuații; avem relația

$$-(a^2+b^2)d_1+d_2+ab\,d_3=0,$$

deci cele trei drepte sînt concurente.

Punctul de întîlnire al acestor drepte este

$$P\left(\frac{ab^4}{a^2+b^2}, -\frac{a^4b}{a^2+b^2}\right).$$

2. *Fiind date, față de un sistem de coordonate carteziene ortogonale, două puncte $M(a_1, b_1)$ și $N(a_2, b_2)$, să se determine două puncte P și Q care să formeze cu acestea două un pătrat.*

Soluție.

Avem

$$\overline{MN} = \sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}.$$

Notînd cu m coeficientul unghiular al dreptei MN, deducem

$$m = \frac{b_1-b_2}{a_1-a_2}.$$

Dacă $P(\alpha_1, \beta_1)$, atunci trebuie să avem

$$\overline{PN} = \overline{MN},\ \overline{PN} \perp \overline{MN}.$$

Deducem

$$\begin{cases} (\alpha_1-a_2)^2+(\beta_1-b_2)^2=(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2, \\ \frac{\beta_1-b_2}{\alpha_1-a_2}\cdot\frac{b_1-b_2}{a_1-a_2} = -1. \end{cases} \quad (1)$$

Analog, dacă $Q\ (\alpha_2, \beta_2)$, rezultă

$$\begin{cases} (\alpha_2 - a_1)^2 + (\beta_2 - b_1)^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2, \\ \dfrac{\beta_2 - b_1}{\alpha_2 - a_1} \cdot \dfrac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} = -1. \end{cases} \tag{2}$$

Sistemele (1) și (2) determină coordonatele punctelor P și Q. Ținînd seama de a doua ecuație (1), putem scrie

$$\frac{\beta_1 - b_2}{\alpha - a_2} = \frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2} = \lambda,$$

deci

$$\beta_1 - b_2 = \lambda(\alpha_1 - a_2),\ a_2 - a_1 = \lambda(b_1 - b_2), \tag{3}$$

Inlocuind aceste valori în prima ecuație (1), rezultă

$$(\lambda^2 + 1)(\alpha_1 - a_2)^2 = (\lambda^2 + 1)(b_1 - b_2)^2,$$

adică

$$\alpha_1 = a_2 + \varepsilon_1 (b_1 - b_2), \qquad (\varepsilon_1 = \pm 1)$$

Din (3) scoatem

$$\beta_1 = b_1 - \varepsilon_1 (a_1 - a_2).$$

Analog, din sistemul (2) deducem

$$\alpha_2 = a_1 + \varepsilon_2 (b_2 - b_1),\ \beta_2 = b_1 - \varepsilon_2 (a_2 - a_1), \qquad (\varepsilon_2 = \pm 1).$$

Scriind că dreapta PQ este paralelă cu MN, obținem

$$[(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2](\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 0,$$

deci $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$.

Punctele căutate sînt

$$P\ [a_2 + \varepsilon(b_1 - b_2),\ b_2 - \varepsilon(a_1 - a_2)],\ Q\ [a_1 + \varepsilon(b_1 - b_2),\ b_1 - \varepsilon(a_1 - a_2)],\ (\varepsilon = \pm 1).$$

3. *Intr-un triunghi dreptunghic dreapta care unește vîrful unghiului drept cu centrul pătratului construit pe ipotenuză este bisectoarea unghiului drept.*

Soluție.

Raportăm figura la sistemul de axe determinat de laturile unghiului drept. Avem, deci, triunghiul OAB cu vîrful $O\ (O,O)$, $A(a, O)$, $B(O, b)$.

Avînd în vedere rezultatul din problema 2, punctele C și D, care formează împreună cu A și B un pătrat, au coordonatele

$$C\ (b, a+b),\ D\ (a+b, a),$$

sau

$$C'\ (-b, b-a), \quad D'\ (a-b, -a).$$

Centrul pătratului $ABCD$ este mijlocul P al segmentului AC, adică punctul $P\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$. Dreapta OP are ecuația $y=x$, adică este bisectoarea unghiului ACB.

Analog, centrul pătratului $ABC'D'$ este mijlocul P' al segmentului AC', adică $P'\left(\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$. Dreapta OP' are ecuația $y=-x$, adică este bisectoarea exterioară a unghiului ACB.

4. *Fiind dată dreapta*

$$(d): Ax+By+C=0$$

și două puncte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, *să se găsească raportul în care dreapta* (d) *împarte segmentul* M_1M_2.

Soluție.

Fie M punctul în care dreapta (d) intersectează dreapta M_1M_2.

Dacă punem $\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}}=\lambda$, coordonatele lui M sînt

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad \lambda=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Înlocuind aceste coordonate în ecuația dreptei (d), avem

$$A(x_1+\lambda x_2)+B(y_1+\lambda y_2)+C(1+\lambda)=0.$$

De aici deducem

$$\lambda=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}.$$

Deci, raportul în care dreapta (d) împarte segmentul M_1M_2 este

$$\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}}=\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}.$$

5. *Fie un poligon oarecare* $M_1M_2M_3\ldots M_n$. *O transversală oarecare* (d) *intersectează latura* M_1M_2 *în* P_1, *latura* M_2M_3 *în* P_2,..., *latura* M_nM_1 *în* P_n.

Să se demonstreze că avem

$$\frac{\overline{P_1M_1}}{\overline{P_1M_2}}\cdot\frac{\overline{P_2M_2}}{\overline{P_2M_3}}\cdots\frac{\overline{P_nM_n}}{\overline{P_nM_1}}=1.$$

Soluție.

Vîrfurile poligonului sînt punctele $M_i(x_i, y_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$, iar dreapta (d) are ecuația

$$Ax+By+C=0.$$

Conform rezultatului din problema 4, această dreaptă intersectează latura M_iM_{i+1} a poligonului în punctul P_i, astfel încît

$$\frac{\overline{P_iM_i}}{\overline{P_iM_{i+1}}}=\frac{Ax_i+By_i+C}{Ax_{i+1}+By_{i+1}+C},\ (i=,1,2,\ldots,n;\ M_{n+1}\equiv M).$$

Dacă notăm

$$\delta_i=Ax_i+By_i+C,$$

avem

$$\frac{\overline{P_1M_1}}{\overline{P_1M_2}}\cdot\frac{\overline{P_2M_2}}{\overline{P_2M_3}}\cdots\frac{\overline{P_nM_n}}{\overline{P_nM_1}}=\frac{\delta_1}{\delta_2}\cdot\frac{\delta_2}{\delta_3}\cdots\frac{\delta_n}{\delta_1}=1.$$

6. *Față de un sistem de coordonate carteziene ortogonale se consideră dreapta* (Δ) *de ecuație*

$$3x+2y+1=0$$

și punctul A (2, 3).

Să se determine două drepte (d_1) *și* (d_2) *care trec prin* A *și fac cu dreapta* (Δ) *un unghiu de* 45°.

Să se scrie apoi ecuațiile a două drepte care împreună cu (d_1) *și* (d_2) *formează un pătrat, în care dreapta* (Δ) *să fie diagonală.*

Soluție.

Ecuația unei drepte care trece prin A este

$$y-3=m\ (x-2).$$

Pentru ca această dreaptă să facă cu dreapta (Δ) un unghiu de 45° trebuie ca

$$\left|\frac{m+\frac{3}{2}}{1-\frac{3m}{2}}\right|=1,$$

sau

$$\frac{2m+3}{2-3m}=\pm 1.$$

De aici rezultă $m_1=5$, $m_2=-\frac{1}{5}$.

Deci, cele două drepte care trec prin A și fac cu dreapta (Δ) unghiuri de 45° au ecuațiile

$$(d_1):5x-y-7=0\ ;\ (d_2):x+5y-17=0.$$

Dreapta (d_1) intersectează dreapta (Δ) în punctul B (1,—2), iar dreapta (d_2) intersectează aceeași dreptă (Δ) în punctul C (—3,4).

Dreptele care trec prin B și C și sînt paralele cu (d_2), respectiv cu (d_1). formează cu acestea două un pătrat în care (Δ) este diagonală.

Dreapta care trece prin B și este paralelă cu (d_2) are ecuația

$$(d_4): x+5y+9=0.$$

Dreapta care trece prin C și este paralelă cu (d_1) are ecuația

$$(d_3): 5x-y+19=0.$$

Dreptele (d_1), (d_2), (d_3), (d_4) formează un pătrat care are dreapta (Δ) ca diagonală.

Cealaltă diagonală are ecuația

$$2x-3y+5=0.$$

7. *Pe laturile CA, OB ale unui triunghi dreptunghic se construiesc pătratele $OACD$, $OBEF$.*

Să se demonstreze că dreptele EF, CD se intersectează într-un punct situat pe înălțimea OH ; la fel dreptele AE, BC.

Soluție.

Luăm ca axe laturile OA, OB și să notăm $OA=a$, $OB=b$. Ecuația dreptei AB este

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0.$$

iar cea a perpendicularei OH este

$$ax-by=0. \tag{1}$$

Punctul de intersecție al dreptelor EF, CD are coordonatele $x=-b$. $y=-a$. Coordonatele acestui punct verificînd ecuația (1), rezultă că punctul de intersecție al dreptelor EF, CD se află pe înălțimea OH.

Ecuația dreptei care trece prin punctele $A\,(a,0)$, $E\,(-b,b)$ este

$$bx+(a+b)\,y-ab=0$$

iar cea a dreptei BC este

$$(a+b)\,x+ay-ab=0.$$

Coordonatele punctului M de intersecție al dreptelor AE, BC sînt

$$x=\frac{ab^2}{a^2+ab+b^2},\quad y=\frac{a^2b}{a^2+ab+b^2}.$$

Aceste valori verifică ecuația (1), ceea ce arată că dreptele AE, BC se intersectează într-un punct pe OH.

Putem arăta acest lucru și în alt mod. Dacă notăm cu d_1 membrul întîi al ecuației (1) cu d_2 membrul întîi al ecuației (2) și cu d_3 membrul întîi

al ecuației (3), avem $d_1=d_3-d_2$, de unde rezultă că dreapta (1) face parte din fasciculul de drepte care trec prin intersecția dreptelor (2) și (3), deci dreptele AE și BC se intersectează într-un punct situat pe înălțimea OH.

8. *Să se determine pe o dreaptă două puncte P și Q care să separe armonic două puncte date A și B, astfel încît:*

1° *mijlocul segmentului PQ să fie un punct dat M;*

2° *distanța dintre P și Q să fie K.*

Soluție.

1° Luăm ca origine pe dreapta dată punctul M. Cele două puncte căutate au în acest caz abscisele x și $-x$.

Punctele A și B au abscisele a și b.

Pentru ca punctele P și Q să separe armonic punctele A și B trebuie ca P să fie conjugat armonic cu Q față de A și B.

Avînd în vedere abscisele celor patru puncte, această condiție se scrie $x^2=ab$ și avem $P(-\sqrt{ab})$, $Q(\sqrt{ab})$.

Punctele P și Q sînt reale dacă punctele A și B sînt de aceeași parte a punctului M.

2° Alegem origina pe dreapta dată în A. Punctul B are abscisa b, iar punctele P și Q au abscisele x și y.

Avem $y-x=k$.

Condiția ca cele patru puncte să formeze o diviziune armonică este deci

$$2xy+b(x+y)=0,$$

sau avînd în vedere relația dintre x și y,

$$2x^2+2(b+k)x+bk=0.$$

Punctele P și Q sînt deci

$$P\left(\frac{-b-k\mp\sqrt{b^2+k^2}}{2}\right),\quad Q\left(\frac{-b+k\mp\sqrt{b^2+k^2}}{2}\right).$$

9. *Dacă trei drepte duse prin vîrfurile unui triunghi sînt concurente, paralelele duse la aceste drepte prin mijloacele laturilor opuse sînt de asemenea concurente.*

Soluție.

Raportăm figura la un sistem de coordonate oblice, avînd ca axe laturile AB și AC ale triunghiului.

Avem deci $A(0,\ 0)$, $B(2b,\ 0)$, $C(0,\ 2c)$ și laturile triunghiului au ecuațiile

$$(AB):\ y=0:\ (AC):\ x=0;\ (BC):\ \frac{x}{2b}+\frac{y}{2c}-1=0.$$

Fie $M(\alpha,\ \beta)$ punctul de intersecție al dreptelor duse prin vîrfurile triunghiului ABC.

Dreptele MA, MB, MC au ecuațiile

$$(MA):\ y=\frac{\beta}{\alpha}x;\quad (MB):\quad y=\frac{\beta}{\alpha-2b}(x-2b);\quad (MC):\ y=\frac{\beta-2c}{\alpha}x-2c.$$

Notînd cu D, E, F, mijloacele laturilor AB, AC, BC, avem

$$D\ (b,\ 0),\ E\ (0,c),\ F\ (b,c).$$

Dreptele (d_1), (d_2), (d_3), duse prin D, E, F, paralele cu MC, MB, MA, au ecuațiile

$$(d_1):\ (\beta-2c)x-\alpha y-b(\beta-2c)=0;$$
$$(d_2):\ \beta x-(\alpha-2b)y+c(\alpha-2b)=0;$$
$$(d_3):\ \beta x-\alpha y+\alpha c-\beta b=0.$$

Se verifică imediat că aceste drepte sînt concurente. Punctul de întîlnire al acestor drepte are coordonatele $x=\frac{b-\alpha}{2}$, $y=\frac{c\beta}{2}$.

10. *Să se calculeze suprafața triunghiului ale cărui laturi au ecuațiile*

$$D_i=A_ix+B_iy+C_iz=0,\ (i=1,\ 2,\ 3).$$

Soluție.

Fie x_1, y_1 coordonatele punctului M de intersecție a laturilor D_2 și D_3. Avem

$$A_2x_1+B_2y_1+C_2=0,\quad A_3x_1+B_3y_1+C_3=0,$$

de unde

$$x_1=\frac{a}{c},\quad y_1=\frac{b}{c},$$

unde am notat cu litere mici minorii determinantului

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}$$

Avem

$$x_2=\frac{a_2}{c_2},\quad y_2=\frac{b_2}{c_2},\quad x_3=\frac{a_3}{c_3},\quad y_3=\frac{b_3}{c_3}.$$

de unde

$$2S=\begin{vmatrix} \frac{a_1}{c_1} & \frac{b_1}{c_1} & 1\\ \frac{a_2}{c_2} & \frac{b_2}{c_2} & 1\\ \frac{a_3}{c_3} & \frac{b_3}{c_3} & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{c_1c_2c_3}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}.$$

Dar determinantul $\| a\ b\ c \|$ este determinantul adjunct al lui Δ; el este egal cu Δ^2 (v. problema 1, cap. I).

Avem

$$2S=\frac{\Delta_2}{c_1c_2c_3}=\frac{\Delta_2}{(A_2B_3-B_2A_3)(A_3B_1-B_3A_1)(A_1B_2-B_1A_2)}.$$

11. *Față de un sistem de coordonate carteziene ortogonale se consideră dreptele* (d_1) *și* (d_2) *de ecuații*

$$d_1\equiv A_1x+B_1y+C_1=0,\quad d_2\equiv A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Să se determine relația care trebuie să existe între α *și* β, *astfel încît unghiul determinat de dreptele*

$$\Delta_1\equiv d_1+\alpha d_2=0,\quad \Delta_2\equiv d_1+\beta d_2=0.$$

să aibă aceleași bisectoare ca și unghiul determinat de dreptele (d_1) *și* (d_2).

În particular, să se scrie această condiție pentru cazul în care ecuațiile celor două drepte (d_1) *și* (d_2) *sînt normale.*

Soluție.

Dacă notăm cu θ_1 unghiul dintre dreptele (Δ_1) și (d_1) și cu θ_2 unghiul dintre (Δ_2) și (d_2), pentru ca unghiul format de dreptele (Δ_1) și (Δ_2) să aibă aceeași bisectoare cu unghiul θ_2 determinat de dreptele (d_1) și (d_2), trebuie ca $\theta_1=\theta_2$.

Avem

$$\operatorname{tg}\theta_1=\frac{-\frac{A_1}{B_1}+\frac{A_1+\alpha A_2}{B_1+\alpha B_2}}{1+\frac{A_1(A_1+\alpha A_2)}{B_1(B_1+\alpha B_2)}}$$

și

$$\operatorname{tg}\theta_2=\frac{\frac{A_2}{B_2}-\frac{A_1+\beta A_2}{B_1+\beta B_2}}{1+\frac{A_2(A_1+\beta A_2)}{B_2(B_1+\beta B_2)}}$$

Pentru ca $\theta_1=\theta_2$ trebuie ca

$$\frac{\alpha(A_2B_1-A_1B_2)}{A_1^2+B_1^2+\alpha(A_1A_2\pm B_1B_2)}=\frac{A_2B_1-A_1B_2}{(A_1A_2+B_1B_2)+\beta(A_2^2+B_2^2)}.$$

adică

$$\alpha\beta=\frac{A_1^2+B_1^2}{A_2^2+B_2^2}.$$

Dacă dreptele (d_1) și (d_2) sînt scrise sub forma normală, avem $A_1^2+B_1^2=1$, $A_2^2+B_2^2=1$, deci relația de mai sus devine $\alpha\beta=1$.

Rezultă, că, fiind date două drepte

$$d_1 \equiv \cos\varphi_1 \cdot x + \sin\varphi_1 \cdot y - p_1 = 0, \quad d_2 \equiv \cos\varphi_2 \cdot x + \sin\varphi_2 \cdot y - p_2 = 0,$$

dreptele de ecuații

$$d_1 + \alpha d_2 = 0, \quad \alpha d_1 + d_2 = 0$$

formează un unghi care are aceleași bisectoare cu unghiul format de dreptele (d_1) și (d_2).

12. *Cu patru drepte putem forma trei triunghiuri având o latură comună. În fiecare din aceste triunghiuri unim centrul cercului circumscris vîrfului opus laturii comune.*

Să se arate că cele trei drepte astfel obținute sînt concurente.

Soluție.

Luăm ca latură comună axa x, axa y fiind oarecare dar perpendiculară pe Ox, și fie

$$(d_i): \; y - m_i x - n_i = 0. \; (i = 1, 2, 3)$$

ecuațiile celorlalte trei drepte.

Să calculăm mai întîi coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului format de dreptele (d_1), (d_2) și Ox.

Pentru aceasta determinăm punctul de întîlnire al perpendicularelor pe mijlocul acestor laturi. Rezultă

$$x = -\frac{n_1 m_2 + n_2 m_1}{2 m_1 m_2}, \quad y = \frac{(m_1 n_2 - m_2 n_1)(1 + m_1 m_2)}{(2 m_1 m_2)(m_1 - m_2)}.$$

Ecuația dreptei (Δ), care unește acest punct cu punctul de întîlnire al dreptelor (d_1) și (d_2) este

$$\frac{y - m_1 x - n_1}{1 + m_1^2} = \frac{y - m_2 x - n_2}{1 + m_2^2}.$$

În mod analog rezultă celelalte drepte prin permutări circulare a indiciilor. Adunînd membru cu membru deducem că cele trei drepte sunt concurente.

13. *Se consideră un triunghi $A_1A_2A_3$, un punct O în planul său și două drepte fixe (d_1) și (d_2) care trec prin O. Dreapta dusă prin O, conjugată armonic cu OA_1 față de (d_1) și (d_2), intersectează dreapta A_2A_3 într-un punct M_1. Analog se obțin punctele M_2 și M_3.*

Să se arate că M_1, M_2, M_3 sînt coliniare.

Soluție.

Raportăm figura la sistemul de axe oblice (d_1), (d_2).

Vîrfurile triunghiului $A_1A_2A_3$ au coordonatele $A_i(a_i, \; b_i)$ $(i = 1, 2, 3,)$.

Dreapta OA_1 are ecuația

$$y = \frac{b_1}{a_1} x.$$

Se știe că dreptele

$$y=m_i x,\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

formează un fascicul armonic dacă

$$2(m_1m_2+m_3m_4)=(m_1+m_2)\ (m_3+m_4). \tag{1}$$

In cazul nostru avem

$$m_1=m,\ m_2=\frac{b_1}{a_1},\ m_3=0,\ m_4=\infty$$

Impărțind relația (1) cu m_4 și apoi făcîndu-l pe m_4 să tindă către infinit, obținem

$$m=-\frac{b_1}{a_1}.$$

Deci, dreapta dusă prin O conjugată armonic cu OA față de (d_1) și (d_2), care ecuația

$$y=\frac{b_1}{a_2}x. \tag{2}$$

Dreapta A_2A_3 are ecuația

$$\frac{x-a_2}{a_3-a_2}=\frac{y-b_2}{b_3-b_2} \tag{3}$$

Rezolvînd sistemul format de ecuațiile (2) și (3), obținem coordonatele punctului M_1:

$$M_1:\ x=\frac{a_1(a_2b_3-a_3b_2)}{a_1(b_2-b_3)+b_1(a_2-a_3)},\ y=\frac{b_1(a_2b_3-a_3b_2)}{a_1(b_2-b_3)+b_1(a_2-a_3)}.$$

Analog obținem coordonatele punctelor M_2, M_3:

$$M_2:\ x=\frac{a_2(a_3b_1-a_1b_3)}{a_2(b_3-b_1)+b_2(a_3-a_1)},\ y=\frac{b_2(a_3b_1-a_1b_3)}{a_2(b_3-b_1)+b_2(a_3-a_1)};$$

$$M_3:\ x=\frac{a_3(a_1b_2-a_2b_1)}{a_3(b_1-b_2)+b_3(a_1-a_2)},\ y=\frac{b_3(a_1b_2-a_2b_1)}{a_3(b_1-b_2)+b_3(a_1-a_2)};$$

Inlocuind aceste valori în condiția de coliniaritate, aceasta este identic verificată. Deci, cele trei puncte sînt coliniare.

14. *Se consideră un triunghi $A_1A_2A_3$. Printr-un punct O din planul triunghiului se duc perpendiculare pe dreptele OA_1, OA_2, OA_3. Aceste perpendiculare întîlnesc respectiv laturile A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 în punctele M_1, M_2, M_3.*

Să se demonstreze că punctele M_1, M_2, M_3 sînt coliniare.

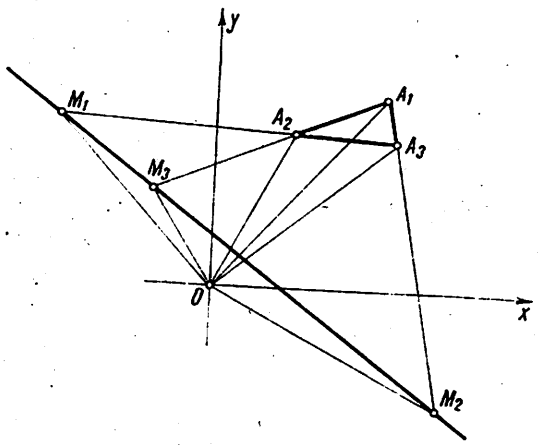


Figura 1

Soluție.

Raportăm figura la un sistem de coordonate carteziene ortogonale avînd originea în O (fig. 1).

Cele trei vîrfuri ale triunghiului sînt A_i (a_i, b_i) $(i=1, 2, 3)$.

Ecuația dreptei OA_1 este

$$y=\frac{b_1}{a_1}x,$$

deci perpendiculara dusă în O pe OA_1 are ecuația

$$y=-\frac{a_1}{b_1}x. \qquad (1)$$

Dreapta A_2A_3 are ecuația

$$\frac{x-a_2}{a_3-a_2}=\frac{y-b_2}{b_3-b_2}. \qquad (2)$$

Rezolvînd sistemul format de ecuațiile (1) și (2) obținem coordonatele punctului M_1:

$$M_1:\ x=-\frac{b_1(a_2b_3-a_3b_2)}{a_1(a_2-a_3)+b_1(b_2-b_3)},\quad y=\frac{a_1(a_2b_3-a_3b_2)}{a_1(a_2-a_3)+b_1(b_2-b_3)}.$$

Analog pentru M_2 și M_3 se obțin coordonatele

$$M_2:\ x=-\frac{b_2(a_3b_1-a_1b_3)}{a_2(a_3-a_1)+b_2(b_3-b_1)},\quad y=\frac{a_2(a_3b_1-a_1b_3)}{a_2(a_3-a_1)+b_2(b_3-b_1)};$$

$$M_3:=-\frac{b_3(a_1b_2-a_2b_1)}{a_3(a_1-a_2)+b_3(b_1-b_2)},\quad y=\frac{a_3(a_1b_2-a_2b_1)}{a_3(a_1-a_2)+b_3(b_1-b_2)}.$$

Înlocuind aceste valori în condiția de coliniaritate aceasta este identic verificată. Punctele sînt deci coliniare.

15. *Față de un sistem de axe ortogonale se consideră trei drepte a căror ecuație comună este*

$$7x^3-6x^2y+12xy^2-4y^3=0 \qquad (1)$$

și un punct $P(a, b)$.

Să se arate că există două secante (d_1) și (d_2) care trec prin punctul P și intersectează cele trei drepte (1) în punctele A_1, A_2, A_3 astfel încît

$$\overline{PA_1}+\overline{PA_2}+\overline{PA_3}=0,$$

și o secantă (d_3) care trece prin P și intersectează dreptele (1) în punctele A_1, A_2, A_3, astfel încît să avem

$$\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}+\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_3}+\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_1}=0.$$

Unde trebuie să se afle P pentru ca dreptele (d_1) și (d_2) să fie reale.

Să se determine punctul P din plan pentru care dreptele (d_1) și (d_2) sînt perpendiculare.

Soluție.

Notînd cu α și β parametrii directori ai dreptei care trece prin P, ecuațiile ei parametrice sînt

$$x=a+\alpha\rho,\ y=b+\beta\rho. \tag{2}$$

Înlocuind aceste valori ale lui x și y în ecuația (1), obținem

$$(7\alpha^3+6\alpha^2\beta+12\alpha\beta^2-4\beta^3)\rho^3+3[(7a+2b)\alpha^2+4(a+2b)\alpha\beta+4(a-b)\beta^2]\rho^2+$$
$$+3[(7a^2+4ab+4b^2)\alpha+2(a^2+4ab-2b^2)\beta]\rho+7a^3+6a^2b+12ab^2-4b^3=0. \tag{3}$$

Rădăcinile ρ_1, ρ_2, ρ_3, ale acestei ecuații corespund, în ecuațiile (2), punctelor A_1, A_2, A_3.

Notînd cu ρ_i, rădăcina corespunzătoare punctului A_i, avem

$$\overline{PA_i}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot\rho_i.$$

Deci,

$$\sum_{i=1}^{3}\overline{PA_i}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sum_{i=1}^{3}\rho_i$$

sau, avînd în vedere relațiile între rădăcinile și coeficienții ecuației (3),

$$\sum_{i=1}^{3}\overline{PA_i}=-3\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\frac{(7a+2b)\alpha^2+4(a+2b)\alpha\beta+4(a-b)\beta^2}{7\alpha^3+6\alpha^2\beta+12\alpha\beta^2-4\beta^3}.$$

Pentru ca $\sum_{i=1}^{3}\overline{PA_i}=0$ trebuie deci ca

$$(7a+2b)\alpha^2+4(a+2b)\alpha\beta+4(a-b)\beta^2=0. \tag{4}$$

Există deci două drepte (d_1), (d_2) ai căror parametri directori sînt dați de ecuația (4), care intersectează dreptele (1) în punctele A_1, A_2, A_3, astfel încît $\sum_{i=1}^{3}\overline{PA_i}=0$.

De asemenea avem

$$\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}+\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_3}+\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_1}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,(\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1)$$

sau, avînd în vedere ecuația (3),

$$\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}+\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_3}+\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_1}=$$
$$=-3\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\frac{(7a^2+4ab+4b^2)\,\alpha+2\,(a^2+4ab-2b^2)\,\beta}{7\alpha^3+6\alpha^2\beta+12\alpha\beta^2-4\beta^3}.$$

Pentru ca $\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}+\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_3}+\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_1}=0$ trebuie ca

$$(7a+4ab+4b)+2(a+4ab-2b)=0. \qquad (5)$$

Există deci o dreaptă (d_3) ai cărei parametri directori sînt dați de ecuația (5), care intersectează dreptele (1) în punctele A_1, A_2, A_3, astfel încît

$$\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}+\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_3}+\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_1}=0.$$

Pentru ca dreptele (4) să fie reale trebuie ca

$$(a+2b)^2-(a-b)(7a+2b)\geqslant 0,$$

adică

$$(a-2b)\,(2a+b)\leqslant 0.$$

Punctul P trebuie să fie în interiorul unghiului determinat de dreptele.

$$x-2y=0,\quad 2x+y=0,$$

în care se află axa Oy.

Pentru ca dreptele (d_1) și (d_2) să fie perpendiculare trebuie ca produsul rădăcinilor ecuației (4) să fie -1, adică $11a-2b=0$.

Deci pentru ca dreptele (d_1) și (d_2) să fie perpendiculare, punctul P trebuie să se afle pe dreapta $11x-2y=0$.

În acest caz dreptele (d_1), (d_2) și (d_3) au ecuațiile

$$(d_1): 2x+6y-35a=0,$$
$$(d_2): 6x-2y+5a=0,$$
$$(d_3): 4x-2y+7a=0.$$

16. *Fie un sistem de axe de coordonate oblice Ox, Oy, care fac între ele un unghiu θ.*

Să se determine ecuațiile simetricelor (d_x), (d_y) ale dreptei (d) de ecuație

$$ux+vy+w=0, \qquad (1)$$

față de axele Ox și Oy.

Soluția 1.

Dreapta (d_x) taie axa Ox în același punct cu dreapta (d), deci ecuația ei se poate scrie

$$ux+v'y+w=0. \qquad (2)$$

Vom determina pe v' avînd în vedere că o perpendiculară oarecare la axa Ox întîlneşte cele două drepte (d) şi (d_x) în puncte avînd ordonatele egale şi de semne contrare.

Ecuaţia unei perpendiculare oarecare la axa Ox este

$$x+y\cos\theta+k=0. \tag{3}$$

Eliminînd pe x între ecuaţiile (1) şi (3) găsim

$$y=\frac{w-ku}{u\cos\theta-v}.$$

iar din ecuaţiile (2) şi (3)

$$y=\frac{w-ku}{u\cos\theta-v'}.$$

De aici rezultă că

$$\frac{w-ku}{u\cos\theta-v'}=-\frac{w-ku}{u\cos\theta-v},$$

de unde deducem

$$v'=2u\cos\theta-v.$$

Ecuaţia dreptei (d_x) este deci

$$(d_x): ux+(2u\cos\theta-v)y+w=0.$$

Pentru a găsi ecuaţia dreptei (d_y), schimbăm în ecuaţia dreptei (d_x) pe x cu y şi pe u cu v. Astfel găsim

$$(d_y): (2v\cos\theta-u)x+vy+w=0.$$

Soluţia 2.

Trecem de la axele oblice Ox, Oy la axele rectangulare OX, OY prin formulele

$$x=X-Y\operatorname{cotg}\theta,\ y=\frac{Y}{\sin\theta} \tag{4}$$

sau

$$X=x+y\cos\theta,\ Y=y\sin\theta. \tag{4'}$$

Deci, în noile axe, ecuaţia dreptei (d) se scrie

$$u\sin\theta\cdot X-(u\cos\theta-v)Y+w\sin\theta=0.$$

Simetrica acestei drepte faţă de axa OX are ecuaţia

$$(d_x): u\sin\theta\cdot X+(u\cos\theta-v)Y+w\sin\theta=0.$$

şi, ţinînd seama de (4'), ecuaţia dreptei (d_x) faţă de sistemul Ox, Oy este

$$(d_x): ux+(2u\cos\theta-v)y+w=0.$$

17. *Față de un sistem de coordonate carteziene ortogonale se consideră trei drepte a căror ecuație comună este*

$$x^3+3\alpha x^2y+y^3=0. \tag{1}$$

Să se determine α astfel încît una din cele trei drepte să fie bisectoarea unghiului format de celelalte două.

Soluție.

Fie (d_1), (d_2), (d_3) cele trei drepte a căror ecuație comună este (1).

Presupunem că (d_2) este bisectoarea unghiului format de dreptele (d_1) și (d_3).

Notăm cu φ unghiul dintre axa Ox și dreapta (d_2) și cu 2θ unghiul dintre dreptele (d_1) și (d_3).

Ecuațiile celor trei drepte sînt

$$(d_1): y=\operatorname{tg}(\varphi-\theta)x;\ (d_2): y=\operatorname{tg}\varphi\cdot x;\ (d_3): y=\operatorname{tg}(\varphi+\theta)\cdot x,$$

sau, notînd $\operatorname{tg}\varphi=\lambda$, $\operatorname{tg}\theta=\mu$,

$$(d_1): y=\frac{\lambda-\mu}{1+\lambda\mu}x;\quad (d_2): y=\lambda x;\quad (d_3): y=\frac{\lambda+\mu}{1-\lambda\mu}x.$$

Avînd în vedere ecuația (1), rezultă că dacă notăm cu m coeficientul unghiular al uneia din dreptele (d_1), (d_2), (d_3), avem

$$m^3+3\alpha m+1=0.$$

Scriind relațiile între rădăcinile și coeficienții acestei ecuații, rezultă

$$\begin{gathered}\frac{\lambda-\mu}{1+\lambda\mu}+\lambda+\frac{\lambda-\mu}{1-\lambda\mu}=0,\\ \lambda\left(\frac{\lambda-\mu}{1+\lambda\mu}+\frac{\lambda-\mu}{1-\lambda\mu}\right)+\frac{\lambda^2-\mu^2}{1-\lambda^2\mu^2}=3\alpha,\\ \frac{\lambda^2-\mu^2}{1-\lambda^2\mu^2}=-1.\end{gathered} \tag{2}$$

Avînd în vedere că $\lambda\neq 0$, din prima ecuație (2) rezultă

$$\mu^2+\frac{3}{\lambda^2-2}.$$

Înlocuind această valoare în a treia ecuație (2), deducem

$$\lambda^3-3\lambda-2=0,$$

care are rădăcinile $\lambda_1=\lambda_2=-1$, $\lambda_3=2$.

Pentru $\lambda=-1$ obținem $\mu^2=-1$, care ne dă soluții imaginare.

Pentru $\lambda=2$ găsim $\mu=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ și $\alpha=-\frac{2}{3}$.

Deci, pentru $\alpha=-\frac{3}{2}$ dreapta (d_2) este bisectoarea unghiului format de dreptele (d_1) și (d_3).

Cele trei drepte au ecuațiile

$$\begin{aligned}(d_1):&\ x-(2+\sqrt{6})y=0,\\ (d_2):&\ 2x-y=0,\\ (d_3):&\ x-(2-\sqrt{6})y=0.\end{aligned}$$

18. *Se dă un triunghi ABC și două puncte fixe E și F în linie dreaptă cu vîrful A. Fie M și N punctele în care dreptele care unesc punctele E și F cu un punct variabil D de pe dreapta BC întîlnesc laturile AB și AC ale triunghiului ABC.*

Să se arate că dreapta MN trece printr-un punct fix.

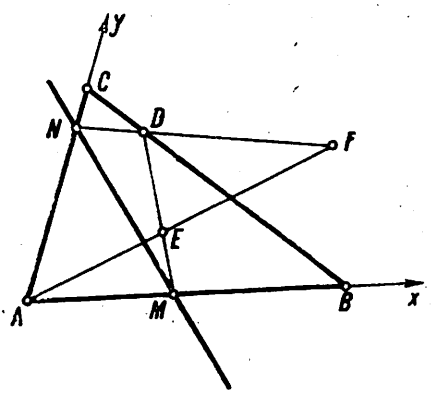


Figura 2.

Soluție.

Raportăm figura la un sistem de coordonate oblice determinat de laturile AB și AC ale triunghiului (fig. 2).

Punctele B și C au coordonatele $B\ (b,O)$, $C(O,c)$, iar E și F sînt $E\ (a_1, ma_1)$ și $F\ (a_2, ma_2)$.

Considerăm un punct variabil pe latura BC a triunghiului $D[\lambda b, c(1-\lambda)]$.

Dreptele ED și FD au ecuațiile

$$(ED): \frac{x-a_1}{\lambda b-a_1}=\frac{y-ma_1}{c(1-\lambda)-ma_1},$$

$$(FD): \frac{x-a_2}{\lambda b-a_2}=\frac{y-ma_2}{c(1-\lambda)-ma_2}$$

și deci intersectează dreptele AB $(x=0)$, respectiv AC $(y=0)$, în punctele

$$M\left[\frac{a_1(c-c\lambda-mb\lambda)}{c(1-\lambda)-ma_1}, 0\right], N\left[0, \frac{a_2(mb\lambda+c\lambda-c)}{\lambda b-a_2}\right].$$

Dreapta MN are ecuația

$$\left(\frac{c-ma_1}{a_1}x+y-c\right)-\lambda\left(\frac{c}{a_1}x+\frac{b}{a_2}y-c-mb\right)=0.$$

Această dreaptă trece prin punctul fix P, intersecția dreptelor.

$$\frac{c-ma_1}{a_1}x+y=c, \frac{c}{a_1}x+\frac{b}{a_2}y=c+mb.$$

19. *Prin origina sistemului de coordonate carteziene ortogonale se duce o dreaptă OM, care face cu axa Ox un unghiu φ. Pe această dreaptă se proiectează ortogonal în P un punct dat A. Rotim apoi dreapta OM în jurul lui P, de un unghi θ.*

1° *Să se determine ecuația dreptei PM' astfel obținute.*

2° *Dacă punctul A și unghiul θ rămîn fixe iar φ variază, să se arate că dreapta PM' trece printr-un punct fix A'. Să se calculeze coordonatele punctului A' în funcție de coordonatele lui A și invers.*

3° Presupunînd că punctul A descrie o dreaptă (d), să se arate că A' descrie o dreaptă (d'). Dacă dreapta (d) rămîne fixă, iar unghiul θ variază, să se arate că dreapta (d') trece printr-un punct fix.

Soluție.

1° Fie punctul $A\,(a,b)$ și dreapta OM de ecuație

$$y=\operatorname{tg}\varphi\cdot x.$$

Dreapta AP are ecuația

$$(x-a)\cos\varphi+(y-b)\sin\varphi=0.$$

Intersectînd aceste două drepte obținem coordonatele punctului P

$$P\,[\cos\varphi\,(a\cos\varphi+b\sin\varphi),\ \sin\varphi\,(a\cos\varphi+b\sin\varphi)].$$

Avînd în vedere că dreptele PM și PM' fac între ele un unghi θ, rezultă că dreapta PM' face cu axa Ox unghiul $\varphi+\theta$.

Ecuația dreptei PM' este

$$y-\sin\varphi\,(a\cos\varphi+b\sin\varphi)=\operatorname{tg}(\varphi+\theta)\,[x-\cos\varphi\,(a\cos\varphi+b\sin\varphi),$$

sau

$$x\sin(\varphi+\theta)-y\cos(\varphi+\theta)-\sin\theta\,(a\cos\varphi+b\sin\varphi)=0.$$

2° Această ecuație se mai poate scrie

$$\sin\varphi\,(x\cos\theta+y\sin\theta-b\sin\theta)+\cos\varphi\,(x\sin\theta-y\cos\theta-a\sin\theta)=0.$$

Deci, dacă A și θ rămîn constante, dreapta PM' trece printr-un punct fix A', intersecția dreptelor

$$x\cos\theta+y\sin\theta=b\sin\theta,\quad x\sin\theta-y\cos\theta=a\sin\theta.$$

Notînd cu a', b' coordonatele punctului A', avem

$$a'=\sin\theta\,(a\sin\theta+b\cos\theta),\quad b'=\sin\theta\,(b\sin\theta-a\cos\theta).$$

Rezolvînd aceste ecuații în raport cu a, b, obținem

$$a=\frac{1}{\sin\theta}\,(a'\sin\theta-b'\cos\theta),\quad b=\frac{1}{\sin\theta}\,(a'\cos\theta+b'\sin\theta).$$

3° Dacă punctul $A\,(a,b)$ descrie dreapta (d) de ecuație

$$y=mx+n,$$

rezultă că avem

$$a'\cos\theta+b'\sin\theta=m\,(a'\sin\theta-b'\cos\theta)+n\sin\theta.$$

Rezultă că punctul $A'\,(a',b')$ descrie dreapta (d') de ecuație

$$(\cos\theta-m\sin\theta)\,x+(\sin\theta+m\cos\theta)\,y-n\sin\theta=0.$$

Dacă dreapta (d) rămîne fixă, iar unghiul θ variază. dreapta (d') formează fasciculul de ecuație

$$\cos\theta\,(x+my)+\sin\theta\,(y-mx-n)=0.$$

deci dreapta (d') trece prin punctul fix $B\left(\frac{mn}{1+m^2},\ \frac{n}{1+m^2}\right)$.

20. *Se consideră un triunghi OAB și pe laturile OA și OB se iau punctele C și D astfel încât $\overline{AC}=\overline{BD}$.*

Să se demonstreze că perpendiculara coborîtă pe mijlocul lui $\overline{CD}$ trece printr-un punct fix cînd lungimea $\overline{AC}$ variază.

Soluția 1.

Raportăm figura la sistemul de coordonate oblice OA și OB ($\widehat{AOB}=\theta$) și notăm $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{AC}=\overline{BD}=l$.

Cu aceste notații ecuația dreptei CD este

$$(CD):\frac{x}{a+l}+\frac{y}{b+l}-1=0.$$

Punctul M, mijlocul segmentului $\overline{CD}$, are coordonatele $\frac{a+l}{2}$, $\frac{b+l}{2}$, deci ecuația unei drepte care trece prin M este

$$y-\frac{b+l}{2}=m\left(x-\frac{a+l}{2}\right). \qquad (1)$$

Condiția ca această dreaptă să fie perpendiculară pe CD este

$$1+\left(m-\frac{b+l}{a+l}\right)\cos\theta-m\frac{b+l}{a+l}=0.$$

De aici deducem

$$m=\frac{(a+l)\cos\theta-(a+l)}{(a+l)\cos\theta-(b+l)}.$$

Înlocuind această valoare în ecuația (1), deducem

$$(b\cos\theta-a)x+(b-a\cos\theta)y+\frac{a^2+b^2}{2}+l[(1-\cos\theta)(y-x)+a-b]=0.$$

Această dreaptă trece prin punctul fix determinat de dreptele

$$\begin{cases}(b\cos\theta-a)x+(b-a\cos\theta)y+\dfrac{a^2-b^2}{2}=0,\\ (1-\cos\theta)(y-x)+a-b=0,\end{cases}$$

adică prin punctul $N\left[\frac{a-b}{2(1-\cos\theta)},-\frac{a-b}{2(1-\cos\theta)}\right]$.

Dacă punctele C și D au fost alese în sensuri contrare, ecuația dreptei CD este.

$$\frac{x}{a+l}+\frac{y}{b-l}-1=0$$

și perpendiculara pe mijlocul segmentului $\overline{CD}$ trece prin punctul

$$N'\left[\frac{a+b}{2(1+\cos\theta)},\frac{a+b}{2(1+\cos\theta)}\right].$$

Soluția 2.

Luăm ca axe de coordonate bisectoarele unghiului $\widehat{AOB}=2\varphi$. Coordonatele punctelor C și D sînt

$$C: x=(a+l)\cos\varphi,\ y=(a+l)\sin\varphi,$$

$$D: x=(b+l)\cos\varphi,\ y=-(b+l)\sin\varphi,$$

deci mijlocul segmentului $\overline{CD}$ este $M\left[\frac{(a+b+l)\cos\varphi}{2},\ \frac{(a-b)\sin\varphi}{2}\right]$.

Coeficientul unghiular al dreptei CD este

$$m=\frac{(a+b+2l)\sin\varphi}{(a-b)\cos\varphi}.$$

Ecuația perpendicularei ridicate pe CD în M este deci

$$(a-l)\,x\cos\varphi+(a+b+2l)\left(y\sin\varphi-\frac{a-b}{2}\right)=0$$

și această dreaptă trece prin punctul $N\left(0,\ \frac{a-b}{2\sin\varphi}\right)$.

21. *Se dă un unghi xOy, o dreaptă fixă (d) paralelă cu Oy și un punct variabil M. Notăm cu A punctul în care dreapta OM intersetează dreapta (d) și cu B punctul în care paralela dusă prin M la dreapta Ox intersectează dreapta (d). Dreapta OB intersectează paralela dusă prin A la Ox în M'.*

Să se demonstreze că dreapta MM' trece printr-un punct fix.

Soluție.

Raportăm figura la sistemul de coordonate oblice determinat de axele xOy.

Dreapta (d) are ecuația $x=a$, iar punctul M are coordonatele α, β.

Ecuația dreptei OM este $y=\frac{\beta}{\alpha}x$. Această dreaptă intersectează dreapta (d) în punctul $A\left(a,\ \frac{a\beta}{\alpha}\right)$.

Punctul în care paralela la Ox dusă prin M intersectează dreapta (d) este $B\ (a, \beta)$.

Dreapta OB are ecuația $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ și intersectează paralela dusă la Ox prin A în punctul $M'\left(\frac{a^2}{\alpha},\ \frac{\beta a}{\alpha}\right)$.

Ecuația dreptei MM' este

$$\beta(x+a)-(a+\alpha)\,y=0.$$

Această dreaptă trece prin punctul fix $C(-a,\ 0)$.

22. *Un unghi APB de mărime dată se rotește în jurul unui punct fix P și intersectează axa Ox în A, iar pe Oy în B.*

Să se demonstreze că există pe Ox un punct fix A' și pe Oy un punct fix B', astfel încît produsul AA', BB' rămîne constant pentru toate pozițiile unghiului.

Să se studieze cazul particular cînd dreptele Ox, Oy coincid.

Soluție.

Raportăm figura la sistemul de axe Ox, Oy care fac între ele unghiul θ.

Fie (α, β) coordonatele punctului fix P și

$$y-\beta=m(x-\alpha),\quad y-\beta=m'(x-\alpha)$$

ecuațiile dreptelor PA, PB; avem, notînd cu V unghiul APB,

$$\operatorname{tg} V=\frac{(m-m')\sin\theta}{1+(m+m')\cos\theta+mm'}, \tag{1}$$

și făcînd $y=0$ sau $x=0$ în ecuațiile dreptelor PA, PB, rezultă

$$\overline{OA}=\alpha-\frac{\beta}{m},\quad \overline{OB}=\beta-m'\alpha.$$

Dacă notăm cu x' abscisa punctului A', cu y' ordonata punctului B', și cu c, valoarea produsului AA', BB', avem

$$c=\left(x'-\alpha+\frac{\beta}{m}\right)(y'-\beta+m'\alpha),$$

sau

$$cm=\alpha(x'-\alpha)mm'+(x'-\alpha)(y'-\beta)m+\alpha\beta m'+\beta(y'-\beta).$$

Această relație și egalitatea (1) sînt verificate prin aceleași valori m, m' dacă coeficienții lor sînt proporționali sau dacă avem

$$\frac{\alpha(x'-\alpha)}{\operatorname{tg} V}=\frac{(x'-\alpha)(y'-\beta)-c}{\operatorname{tg} V\cos\theta-\sin\theta}=\frac{\alpha\beta}{\operatorname{tg} V\cos\theta\sin\theta}=\frac{\beta(y'-\beta)}{\operatorname{tg} V},$$

de unde rezultă

$$x'-\alpha=\frac{\beta\operatorname{tg} V}{\operatorname{tg} V\cos\theta+\sin\theta}=\frac{\beta\sin V}{\sin(V+\theta)},$$

$$y'-\beta=\frac{\alpha\operatorname{tg} V}{\operatorname{tg} V\cos\theta+\sin\theta}=\frac{\alpha\sin V}{\sin(V+\theta)},$$

$$c=\frac{\alpha\beta(\operatorname{tg}^2 V\sin^2\theta+\sin^2\theta)}{(\operatorname{tg} V\cos\theta+\sin\theta)^2}=\frac{\alpha\beta\sin^2\theta}{\sin^2(V+\theta)}.$$

Aceste relații determină punctele A', B' și valoarea produsului AA', BB'.

Cînd dreptele Ox, Oy coincid, se poate lua ca axă y perpendiculara coborîtă din punctul P pe Ox; avem atunci, notînd cu x' și x'' abscisele punctelor A' și B', $C=\left(x'+\frac{\beta}{m}\right)\left(x''+\frac{\beta}{m'}\right)$.

Această relație și următoarea

$$\operatorname{tg} V=\frac{m-m'}{1+m\,m'}$$

sînt verificate pentru aceleași valori ale lui m și m' dacă avem

$$\frac{x'\,x''-c}{\operatorname{tg} V}=\frac{\beta x'}{-1}=\frac{\beta x''}{1}=\frac{\beta^2}{\operatorname{tg} V},$$

de unde rezultă

$$x''=-x'=\frac{\beta}{\operatorname{tg} V},\quad -c=\beta^2+\frac{\beta^2}{\operatorname{tg}^2 V}=\frac{\beta^2}{\sin^2 V}.$$

23. *Se consideră un triunghi AB_1B_2 care are vîrful A pe axa Ox și vîrfurile B_1 și B_2 pe axa Oy. Luăm pe dreapta AB_1 un punct M_1 și pe AB_2 un punct M_2, astfel încît axa Ox să fie bisectoarea unghiului M_1OM_2.*

1° Să se arate că dreapta M_1M_2 trece printr-un punct fix P și să se afle locul geometric al punctului P cînd punctele A, B_1, B_2 variază.

2° Presupunem că punctul P este fix și că dreapta AB_2 se mișcă paralel cu o direcție fixă. Să se arate că mediana dusă din B_1 și înălțimea din B_2 trec prin cîte un punct fix.

Soluție.

1° Fie cele trei puncte $A\,(\alpha,\,0)$. $B_1\,(0,\,\beta_1)$, $B_2\,(0,\,\beta_2)$. Punctele M_1 și M_2 au coordonatele

$$M_1\,[\lambda\alpha,\,(1-\lambda)\,\beta_1],\ M_2\,[\mu\alpha,\,(1-\mu)\beta_2].$$

Notînd cu m_1 și m_2 coeficienții unghiulari ai dreptelor OM_1 și OM_2, avem

$$m_1=\frac{(1-\lambda)\,\beta_1}{\lambda\alpha},\quad m_2=\frac{(1-\mu)\,\beta_2}{\mu\alpha}.$$

Pentru ca axa Ox să fie bisectoarea unghiului M_1OM_2 trebuie ca $m_1+m_2=0$, adică

$$\beta_1\mu+\beta_2\lambda-(\beta_1+\beta_2)\,\lambda\mu=0.$$

De aici deducem

$$\mu=\frac{\beta_1\lambda}{(\beta_1+\beta_2)\,\lambda-\beta_1}.$$

Ecuația dreptei M_1M_2 este

$$\frac{x-\alpha\lambda}{\alpha(\mu-\lambda)}=\frac{y-\beta_1(1-\lambda)}{\beta_2-\beta_1+\beta_1\lambda-\beta_2\mu},$$

sau, avînd în vedere valoarea lui μ și simplificînd cu $1-\lambda\neq 0$.

$$\lambda\,[\beta_1\,(\beta_1+\beta_2)\,x+\alpha\,(\beta_1+\beta_2)\,y-2\alpha\beta_1\beta_2]-\beta_1\,(\beta_1-\beta_2)\,x=0.$$

Dreapta M_1M_2 trece deci prin punctul de intersecție al dreptelor

$$x=0,\ \beta_1\,(\beta_1+\beta_2)\,x+\alpha\,(\beta_1+\beta_2)\,y-2\alpha\beta_1\beta_2=0,$$

adică prin punctul fix $P\left(0,\,\frac{2\beta_1\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\right)$.

Dacă punctele A, B_1 și B_2 variază, punctul P descrie dreapta $x=0$, adică axa Oy.

2° Dacă dreapta AB_2 se mișcă paralel cu direcția fixă k, rezultă

$$\beta_2 = k\alpha. \tag{1}$$

Notînd cu l valoarea constantă a ordonatei punctului P și avînd relația (1), deducem

$$\beta_1 = \frac{klx}{2kx-l}. \tag{2}$$

Ținînd seama de relațiile (1) și (2), ecuația medianei triunghiului AB_1B_2 dusă prin B_1 se scrie

$$k\alpha\ (4kx-2y+l) - l\,(4kx-y)=0.$$

Această dreaptă trece prin punctul fix $Q\left(\frac{l}{4k}, l\right)$.

În aceleași condiții ecuația înălțimii coborîte din B_2 pe AB_1 este

$$k\,\alpha\,(2x+kl) - l(x+ky)=0$$

și trece prin punctul fix $R\left(-\frac{kl}{2}, \frac{l}{2}\right)$.

24. *Fiind date două axe perpendiculare Ox, Oy se proiectează un punct P din plan în A pe Ox și în B pe Oy.*

Dacă punctul P se mișcă pe o paralelă (d) la una din bisectoarele unghiului xOy, să se arate că perpendiculara coborîtă din P pe AB trece printr-un punct fix Q. Să se afle locul geometric al punctului Q cînd dreapta (d) variază, rămînînd paralelă la bisectoarea respectivă.

Soluție.

Fie $P\ (\alpha, \beta)$ și $A\ (\alpha, 0)$, $B\ (0, \beta)$. Ecuația dreptei AB este

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}-1=0.$$

Perpendiculara coborîtă din P pe AB are ecuația

$$\alpha x-\beta y-\alpha^2+\beta^2=0. \tag{1}$$

Presupunînd că punctul P se mișcă pe o paralelă la una din bisectoarele unghiului xOy, de exemplu la bisectoarea cadranului I, rezultă $\beta=\alpha+a$.

Înlocuind această valoare în ecuația (1), deducem

$$\alpha\,(x-y+2a) - a\,(y-a)=0.$$

Deci, această dreaptă trece prin punctul de intersecție al dreptelor

$$x-y+2a=0,\ y-a=0,$$

adică prin punctul $Q\ (-a, a)$.

Dacă dreapta pe care se mișcă punctul P variază, rămînînd paralelă la bisectoarea întîi punctul Q descrie dreapta

$$x+y=0,$$

adică bisectoarea cadranului II.

Dacă în loc de bisectoarea întîi considerăm bisectoarea a doua, punctul fix este Q' (b, b) și locul descris de Q' este bisectoarea întîi.

25. *Se dă o dreaptă fixă (d) și un punct fix O ne situate pe ea. Prin O se duc două drepte perpendiculare care întîlnesc pe (d) în M_1 și M_2. Prin M_1 și M_2 se duc perpendiculare pe (d) care întîlnesc pe OM_2 respectiv OM_1 în N_1 și N_2. Presupunînd că unghiul drept M_1OM_2 se rotește în jurul lui O, să se arate că dreapta N_1N_2 trece printr-un punct fix. În aceleași condiții să se afle locul geometric al mijlocului segmentului N_1N_2.*

Soluție.

Luăm ca axe de coordonate paralele dusă la (d) prin O (axa Ox) și perpendiculara dusă la (d) prin O (axa Oy).

Dreapta (d) are ecuația $y=a, (a\neq 0)$.

Notînd cu φ unghiul dintre axa Ox și dreapta OM_1, ecuațiile dreptelor OM_1 și OM_2 sînt

$$(OM_1): y=\operatorname{tg}\varphi\cdot x, \qquad (OM_2): y=-\operatorname{cotg}\alpha\cdot x.$$

Punctele M_1 și M_2 au deci coordonatele

$$M_1(a\ \operatorname{cgtg}\ \varphi, a),\ M_2(-a\ \operatorname{tg}\ \varphi, a).$$

Dreptele M_1N_1 și M_2N_2 au ecuațiile

$$(M_1N_1): x=a\ \operatorname{cotg}\ \varphi, \qquad (M_2N_2): x=-a\ \operatorname{tg}\ \varphi.$$

Intersectînd aceste drepte respectiv cu OM_2 și OM_1, găsim

$$N_1(a\ \operatorname{cotg}\varphi, -a\ \operatorname{cotg}^2\varphi),\ N_2(-a\ \operatorname{tg}\varphi, -a\ \operatorname{tg}^2\varphi).$$

Ecuația dreptei N_1N_2 este

$$(N_1N_2):\ 2\ \operatorname{cotg}\varphi\cdot x+y+a=0.$$

Această dreaptă trece prin punctul fix $A\ (o, -a)$.

Notînd cu P mijlocul segmentului N_1N_2, avem

$$P: x=\frac{a}{2}(\operatorname{cotg}\varphi-\operatorname{tg}\varphi),\ y=-\frac{a}{2}(\operatorname{cotg}^2\varphi+\operatorname{tg}^2\varphi).$$

Pentru a găsi locul geometric a lui P trebuie să eliminăm parametru φ între aceste două ecuații. Avem

$$\operatorname{cotg}\varphi-\operatorname{tg}\varphi=\frac{2x}{a},\ \operatorname{cotg}^2\varphi+\operatorname{tg}^2\varphi=-\frac{2y}{a}.$$

Ridicînd la pătrat prima relație și avînd în vedere a doua relație, obținem

$$x^2=-\frac{a}{2}(y+a).$$

Deci locul geometric al punctului P este o parabolă.

26. Se dau două axe oarecare Ox, Oy și un punct M. Prin acest punct se duce o secantă variabilă care întîlnește axa Ox într-un punct A și pe Oy în B. Notăm cu C mijlocul lui OM și cu D punctul unde A întîlnește axa Oy. Prin D se duce o paralelă la OM care întîlnește secanta MAB în punctul N. Să se găsească locul geometric al punctului N.

Soluție.

Fie (a,b) coordonatele punctului M și

$$y-b=\lambda\ (x-a) \tag{1}$$

ecuația secantei MAB. Punctul A are ca abscisă $\frac{\lambda a-b}{\lambda}$, iar ecuația dreptei AC este

$$\frac{y}{x-\frac{\lambda a-b}{\lambda}}=\frac{\frac{b}{2}}{\frac{a}{2}-\frac{\lambda a-b}{\lambda}}.$$

Această dreaptă întîlnește pe Oy în D a cărui ordonată este $\frac{b(b-\lambda a)}{2b-\lambda a}$, deci ecuația dreptei DM se scrie

$$y-\frac{b(b-\lambda a)}{2b-\lambda}=\frac{b}{a}x. \tag{2}$$

obținem ecuația locului punctului M eliminînd pe λ între ecuațiile (1) și (2).

Din prima rezultă $\lambda=\frac{y-b}{x-a}$ și, înlocuind pe λ în ecuația (2), deducem

$$y-\frac{b}{a}x-\frac{b(bx-ay)}{2bx-ay-ab}=0,$$

sau

$$(bx-ay)\ (2bx-ay)=0$$

Această ecuație reprezintă două drepte, Prima, $bx-ay=0$, este dreapta OM.

Dacă luăm un punct (x_0,y_0) pe această dreaptă avem $\frac{y_0}{x_0}=\frac{b}{a}$.

Valoarea lui λ corespunzătoare este

$$\lambda=\frac{y_0-b}{x_0-a}=\frac{b}{a}.$$

Dacă înlocuim pe λ prin $\frac{b}{a}$ în ecuațiile (1) și (2), ele reprezintă amîndouă dreapta OM. Cînd secanta MAB se confundă cu OM dreapta DN coincide de asemenea cu OM. Deci, putem considera pe OM ca un loc singular.

Locul geometric este dreapta $2bx-ay=0$, conjugata armonică a lui Ox în raport cu Oy și OM.

27. Pe trei laturi ale unui triunghiu ABC, în exteriorul laturilor, se construiesc trei triunghiuri isoscele asemenea ABC', AB'C, A'BC.

Dreptele AA', BB', CC' se întîlnesc într-un punct O.

Să se determine locul punctelor O cînd triunghiurile isoscele variază.

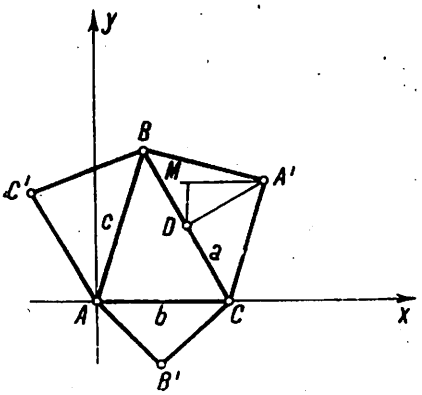


Figura 3.

Soluție.

Să introducem un sistem de coordonate carteziene ortogonale Axy, avînd ca axa x dreapta AC (fig. 3). Celelalte două vîrfuri ale triunghiului ABC, de laturi a, b, c, au coordonatele $B\ (h, k)$ și $C\ (b, o)$: să indicăm cu β și γ unghiurile $\widehat{BAC}$ și $\widehat{BCA}$.

Fie α unghiul de la baza celor trei triunghiuri isoscele asemenea ABC', $AB'C$, $A'BC$, construite în exteriorul laturilor triunghiului ABC $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

Coordonatele punctelor B', C', și D, mijlocul segmentului BC, sînt

$$C'\begin{cases} x=\dfrac{c}{2\cos\alpha}\cos(\alpha+\beta), \\ y=\dfrac{c}{2\cos\alpha}\sin(\alpha+\beta); \end{cases} \quad B'\begin{cases} x=\dfrac{b}{2} \\ y=\dfrac{b}{2}\operatorname{tg}\alpha; \end{cases} \quad D'\begin{cases} x=\dfrac{h+b}{2}, \\ y=\dfrac{k}{2}. \end{cases}$$

Construind triunghiul dreptunghic DMA' (unde M este punctul de intersecție al paralelei la axa Ay dusă prin D și al paralelei la axa Ax dusă prin A')

Avem $\widehat{DA'M}=\gamma$, $A'D=\dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$, deci coordonatele lui A' sînt

$$A'\begin{cases} x=\dfrac{h+b}{2}+\dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha\sin\gamma=\dfrac{h+b}{2}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{2}k, \\ y=\dfrac{k}{2}+\operatorname{tg}\alpha\cos\gamma=\dfrac{k}{2}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{2}(b-h). \end{cases}$$

Ecuațiile dreptelor AA', BB', CC' sînt deci

$$(AA'):\ [k+(b-h)\lambda]x-(b+h+k\lambda)y=0,$$

$$(BB'):\ (2k+b\lambda)x+(b-2h)y-b(k+h\lambda)=0,$$

$$(CC'):\ (k+h\lambda)x+(2b-h+k\lambda)y-b(k+h\lambda)=0,$$

unde am notat $\operatorname{tg}\alpha=\lambda$.

Scăzînd ecuația dreptei CC' din ecuația dreptei BB', obținem ecuația dreptei AA', deci cele trei drepte sînt concurente.

Pentru a determina ecuația locului geometric al punctului de întîlnire al dreptelor AA', BB', CC', trebuie să eliminăm pe λ între ecuațiile dreptelor AA', BB'.

Obținem ecuația

$$2(kh-bk)x^2+2(k^2+hb^2-h^2)\,xy-(2hk-bk)y^2+(kb^2-2khb)\,x+ \\ +(b^2h-bh^2-k^2b)y=0.$$

Locul geometric este deci o hiperbolă echilaterală care trece prin $A(0,0)$, $B(h,k)$, $C(b,0)$.

Dacă $h=\frac{b}{2}$, adică dacă triunghiul ABC este isoscel, hiperbola degenerează în dreptele $y=0$ și $x=\frac{b}{2}$, adică în dreapta AC și în înălțimea BH a triunghiului ABC.

28. *Se consideră două drepte Ox și Oy și un punct P nesituat pe ele. Prin P se duc două secante variabile care intersectează dreptele Ox și Oy în A_1, B_1, respectiv A_2, B_2.*

Să se găsească locul geometric al punctului de intersecție al dreptelor A_1B_2 și A_2B_1.

Soluție.

Raportăm figura la sistemul de axe determinat de dreptele Ox și Oy. Cele cinci puncte P, A_1, B_1, A_2, B_2, au coordonatele

$$P(x_0,y_0),\ A_i(\alpha_i,0),\ B_i(0,\beta_i),\ (i=1,2;\ \alpha_1\neq\alpha_2;\ \beta_1\neq\beta_2).$$

Ecuațiile dreptelor A_1B_1 și A_2B_2 sînt

$$(A_iB_i):\ \frac{x}{\alpha_i}+\frac{y}{\beta_i}-1=0,\ (i=1,2).$$

Scriind că punctul P se află pe aceeste drepte, avem condițiile

$$\frac{x_0}{\alpha_1}+\frac{y_0}{\beta_1}-1=0,\ \frac{x_0}{\alpha_2}+\frac{y_0}{\beta_2}-1=0. \tag{1}$$

Ecuațiile dreptelor A_1B_2 și A_2B_1 sînt

$$(A_1B_2):\ \frac{x}{\alpha_1}+\frac{y}{\beta_2}-1=0,\ (A_2B_1):\ \frac{x}{\alpha_2}+\frac{y}{\beta_1}-1=0. \tag{2}$$

Pentru a găsi locul geometric al punctului de intersecție al dreptelor A_1B_2 și A_2B_1 trebuie să eliminăm parametrii α_1, β_1, α_2, β_2, între ecuațiile (1) și (2).

Scăzînd între ele ecuațiile (1), obținem

$$x_0\left(\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\alpha_2}\right)=y_0\left(\frac{1}{\beta_2}-\frac{1}{\beta_1}\right). \tag{3}$$

Analog, din ecuațiile (2) rezultă

$$y\left(\frac{1}{\beta_1}-\frac{1}{\beta_2}\right)=x\left(\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\alpha_2}\right). \tag{4}$$

Inmulțind membru cu membru ecuațiile (3) și (4) și ținînd seama că $\alpha_1 \neq \alpha_2$ și $\beta_1 \neq \beta_2$ rezultă

$$y_0x + x_0y = 0.$$

Aceasta este ecuația locului geometric.

Deci, locul geometric este o dreaptă care trece prin O și este conjugată armonic cu OP față de Ox și Oy.

29. *Se dau două axe rectangulare Ox, Oy și un punct $M(a, b)$. Prin acest punct se duc două drepte perpendiculare variabile, dintre care una întîlnește pe Ox în A și cealaltă pe Oy în B. Să se găsească locul proiecției punctului M pe AB.*

Soluție.

Dacă însemnăm prin m coeficientul unghiular al dreptei MB, coeficientul unghiular al dreptei MA este $-\frac{1}{m}$. Abscisa punctului A este $a+bm$, iar ordonata lui B este $b-am$. Ecuația lui AB este

$$\frac{x}{a+bm} + \frac{y}{b-am} - 1 = 0. \qquad (1)$$

Ecuația perpendicularei coborîte din M pe AB este

$$(x-a)(a+bm) - (y-b)(b-am) = 0. \qquad (2)$$

Pentru a obține ecuația locului geometric eliminăm pe m între ecuațiile (1) și (2).

Scriem ecuația (2) sub forma

$$\frac{a+bm}{y-b} = \frac{b-am}{x-a}.$$

Amplificînd primul raport cu a și al doilea cu b și făcînd suma numărătorilor supra suma numitorilor, obținem

$$\frac{a+bm}{y-b} = \frac{b-am}{x-a} = \frac{a^2+b^2}{a(y-b)+b(x-a)},$$

deci

$$a+bm = \frac{(a^2+b^2)(y-b)}{a(y-b)+b(x-a)},$$

$$b-am = \frac{(a^2+b^2)(x-a)}{a(y-b)+b(x-a)}.$$

Introducem valorile $a+bm$ și $b-am$ în ecuația (1) pentru a obține ecuația locului geometric. Avem în sfîrșit

$$\frac{x[a(y-b)+b(x-a)]}{(a^2+b^2)(y-b)} + \frac{y[a(y-b)+b(x-a)]}{(a^2+b^2)(x-a)} - 1 = 0.$$

Scăpînd de numitori obținem ecuația

$$(bx+ay-ab)[(x-a)^2+(y-b)^2]=0.$$

Avînd în vedere că $(x-a)^2+(y-b)^2\neq 0$, ecuația locului geometric este

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0,$$

deci este dreapta care unește proiecțiile punctului M pe axele Ox și Oy.

30. *Față de un sistem de coordonate cartezine ortogonale se consideră familia de drepte de ecuație*

$$x-ty-\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}t^2=0. \tag{1}$$

Fie (d_1), (d_2), (d_3) dreptele din acest fascicul care corespund rădăcinilor ecuației

$$2\lambda t^3-t^2+\lambda^2=0. \tag{2}$$

Să se determine locul geometric al ortocentrului triunghiului determinat de dreptele (d_1), (d_2), (d_3) cînd parametrul λ variază.

Soluție.

Notînd cu t_1, t_2, t_3 rădăcinile ecuației (2), cele trei drepte d_1, d_2, d_3 au ecuațiile

$$(d_i):\ x-t_iy-\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}t_i^2=0,\ (i=1,2,3).$$

Înălțimea coborîtă din punctul de intersecție al dreptelor (d_1) și (d_2) pe dreapta (d_3) are ecuația de forma

$$x-t_1y-\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}t_1^2+k\left(x-t_2y-\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}t_2^2\right)=0.$$

Determinăm parametrul k punînd condiția ca această dreaptă să fie perpendiculară pe (d_3). Obținem astfel

$$k=\frac{1+t_1t_3}{1+t_2t_3}.$$

Deci, ecuația înălțimii coborîte pe latura (d_3) al triunghiului este

$$t_3x+y+\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}(t_1+t_2+t_1t_2t_3)=0$$

sau, avînd în vedere că

$$t_1+t_2+t_3=\frac{1}{2\lambda},\quad t_1t_2t_3=-\frac{\lambda}{2},$$

$$(h_3):\ t_3x+y+\frac{1-\lambda^2-2\lambda t_3}{1+\lambda^2}=0.$$

Ecuația înălțimii coborîte pe dreapta (d_2) este

$$(h_2): t^2x+y+\frac{1-\lambda^2-2\lambda t_2}{1+\lambda^2}=0.$$

Aceste două drepte se întîlnesc în punctul $H\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}, \frac{\lambda^2-1}{1+\lambda^2}\right)$.

Acest punct este ortocentrul triunghiului determinat de dreptele (d_1), (d_2), (d_3).

Cînd λ variază, punctul H descrie cercul

$$x^2+y^2-1=0.$$

31. Dreptele (d_1), (d_2), (d_3) se rotesc în jurul punctelor coliniare A_1, A_2, A_3. In același timp, punctul de intersecție al dreptelor (d_1) și (d_2) alunecă de-a lungul dreptei (Δ), iar punctul de intersecție al dreptelor (d_1) și (d_3) alunecă de-a lungul dreptei (Δ'). Să se demonstreze că locul geometric al punctului de intersecție al dreptelor (d_2) și (d_3) este o dreaptă care trece prin intersecția dreptelor (Δ) și (Δ')

N. M. Giunter și R. O. Kuzmin

Soluția 1.

Raportăm figura la un sistem de coordonate oblice determinat de dreptele (Δ) și (Δ').

Dreapta pe care se află punctele A_1, A_2, A_3 are ecuația

$$y=mx+n, \tag{1}$$

iar punctele A_i $(i=1, 2, 3)$ au coordonatele $x=a_i$, $y=ma_i+n$.

Notînd cu $P(\lambda, 0)$ punctul de pe dreapta (Δ) unde se întîlnesc dreptele (d_1) și (d_2), ecuațiile dreptelor (d_1) și (d_2) sînt

$$(d_1): (ma_1+n)x+(\lambda-a_1)y-\lambda(a_1m+n)=0,$$

$$(d_2): (ma_2+n)x+(\lambda-a_2)y-\lambda(a_2m+n)=0.$$

Dreapta (d_1) intersectează dreapta (Δ') în punctul $Q\left[0, \frac{\lambda(a_1m+n)}{\lambda-a_1}\right]$

Ecuația dreptei (d_3) este deci

$$(d_3): [\lambda m(a_1-a_3)+a_1(ma_3+n)]x+a_3(\lambda-a_1)y-a_3\lambda(a_1m+n)=0.$$

Pentru a găsi ecuația locului geometric al intersecției dreptelor (d_2) și (d_3), trebuie să-l eliminăm pe λ între ecuațiile acestor drepte. Obținem astfel

$$(mx-y+n)[(a_3-a_1)(ma_2+n)x+a_3(a_1-a_2)y]=0.$$

Locul geometric este deci format din dreapta $A_1A_2A_3$ și din dreapta

$$(a_3-a_1)(ma_2+n)x+a_3(a_1-a_2)y=0. \tag{2}$$

Dreapta $A_1A_2A_3$ se obține pentru cazul în care punctul P coincide cu intersecția dreptelor (Δ) cu $A_1A_2A_3$. Dreapta (2) este o dreaptă care trece prin origine, deci prin intersecția dreptelor (Δ) cu (Δ').

Soluția 2.

Raportăm figura la un sistem de coordonate proiective în care dreptele (Δ) și (Δ') au ecuațiile $x_1=0$ și $x_2=0$, iar dreapta $A_1A_2A_3$ are ecuația $x_3=0$, deci triunghiul fundamental este format din dreptele (Δ), (Δ') și $A_1A_2A_3$.

Față de acest sistem punctele A_1, A_2, A_3 au coordonatele

$$A_1\,(a_1,\ 1,\ 0),\ A_2\,(a_2,\ 1,\ 0),\ A_3\,(a_3,\ 1,\ 0),$$

iar punctul P $(0,1,\lambda)$.

Ecuațiile dreptelor (d_1) și (d_2) sînt

$$(d_1):\ \lambda x_1-a_1\ \lambda x_2+a_1\ x_3=0,\qquad (d_2):\ \lambda x_1-a_2\ \lambda x_2+a_2\ x_3=0.$$

Drepta (d_1) intersectează dreapta (Δ') în punctul $Q(a_1,0,-\lambda)$. Ecuația dreptei (d_3) este deci

$$(d_3):\ \lambda x_1-a_3\ \lambda x_2+a_1\ x_3=0.$$

Pentru a găsi locul geometric căutat trebuie să-l eliminăm pe λ între ecuațiile dreptelor (d_2) și (d_3). Obținem astfel

$$x_3[(a_1-a_2)x_1-a_2(a_1-a_3)x_2]=0,$$

deci locul geometric este format din dreptele

$$x_3=0,\ (a_1-a_2)x_1-a_2(a_1-a_3)x_2=0,$$

adică din dreapta $A_1A_2A_3$ și dintr-o dreaptă care trece prin intersecția dreptelor (Δ) și (Δ').

32. Între coordonatele x, y ale unui punct A și coordonatele u, v ale unui punct B, se dau relațiile

$$x=\frac{u\,(u^2+\lambda v^2)}{u^2+v^2},\quad y=\frac{v(v^2+\lambda u^2)}{u^2+v^2},\qquad (1)$$

unde λ este un număr pozitiv dat.

După ce s-a dedus din această relație ecuația care leagă coeficienții unghiulari α, β ai dreptelor care unesc originea cu punctele A, B, să se arate că, în general, la fiecare punct A corespund trei poziții ale punctului B.

Aceste puncte B_1, B_2, B_3 pot fi reale și distincte? În ce poziție trebuie să se găsească punctul A în acest caz? Să se determine locul geometric a lui A astfel încît B_2 și B_3 să fie confundate. Cînd A descrie acest loc să se afle locul geometric al punctului B_2 și al punctului B_1.

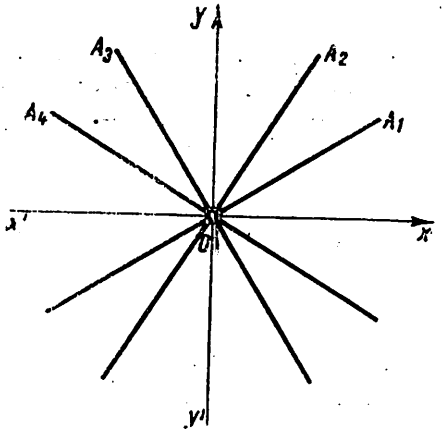


Figura 4.

Soluție.

Avem

$$\alpha=\frac{y}{x}=\frac{v^3+\lambda v u^2}{u^3+\lambda u v^2}=\frac{\beta^3+\lambda\beta}{1+\lambda\beta^2},$$

unde am pus $\frac{v}{u}=\beta$, deci la fiecare valoare a lui α corespund trei valori ale lui β date de ecuația

$$\beta^3-\lambda\alpha\beta^2+\lambda\beta-\alpha=0. \qquad (2)$$

Din relațiile (1) reducem

$$u=\frac{(1+\beta^2)x}{1+\lambda\beta^2}, \qquad v=\frac{\beta(1+\beta^2)x}{1+\lambda\beta^2},$$

ceea ce arată că la fiecare valoare a lui β corespunde un singur punct B și, prin urmare, la fiecare valoare a lui α corespund trei puncte B_1 B_2, B_3. Fiecare din aceste puncte este real sau imaginar, după cum corespunde unei valori reale sau unei valori imaginare β.

Anulînd realizantul ecuației (2) obținem ecuația

$$\Delta=4\lambda^3\alpha^4-(\lambda^4+18\lambda^2-27)\alpha^2+4\lambda^3=0. \qquad (3)$$

Rădăcinile acestei ecuații în α^2 sînt reale dacă avem

$$(\lambda^4+18\lambda^2-27)^2-64\lambda^6\equiv(\lambda-1)(\lambda-3)^3(\lambda+1)(\lambda-3)^3\geqslant 0.$$

Deoarece se presupune $\lambda>0$, semnul primului membru depinde de semnul produsului $(\lambda-1)(\lambda-3)$.

Dacă avem $\lambda<\lambda<3$, rădăcinile ecuației (3) sînt imaginare; Δ este atunci pozitiv și un singur punct B este real.

Dacă avem $0<\lambda<1$ sau $\lambda>3$, valorile lui α^2 date de ecuația (2) sînt reale și aceste valori sînt pozitive dacă trinomul $\lambda^4+18\lambda^2-27$ este pozitiv; cum acest trinom are o singură rădăcină pozitivă cuprinsă între 1 și 3, cele patru rădăcini ale ecuației (2) sînt imaginare pentru $\lambda<1$ și reale pentru $\lambda>3$.

Dacă se reprezintă grafic patru drepte OA_1, OA_2, OA_3, OA_4 ai căror coeficienți unghiulari sînt rădăcinile ecuației (2), aceste drepte sînt simetrice în raport cu axele și sînt două cîte două perpendiculare, deoarece una din rădăcini fiind α, celelalte sînt $\frac{1}{\alpha}-\alpha$ și $\frac{1}{\alpha}$; mai mult, cum pentru

$\alpha=0$ avem $\Delta>0$, regiunile din interiorul unghiurilor ascuțite determinate de dreptele OA_1, OA_4 și OA_2, OA_3 corespund la un singur punct B real, în timp ce celelalte corespund la trei puncte B reale.

Două puncte B sînt confundate în timp ce A descrie una din cele patru drepte OA_1, OA_2, OA_3, OA_4.

Dacă notăm cu β rădăcina dublă a ecuației (1) care corespunde punctelor confundate B_2, B_3 și cu γ rădăcina care corespunde punctului B_1, avem.

$$2\beta+\gamma=\lambda\alpha,\ \beta^2+2\beta\gamma=\lambda,\ \beta^2\gamma=\alpha.$$

Eliminînd pe β și α obținem locul descris de punctul $B_2\equiv B_3$, iar eliminînd pe γ și α obținem locul descris de punctul B_1.

Găsim astfel

$$\lambda\beta^4-(\lambda^2-3)\beta^2+\lambda=0,$$

$$4\lambda\gamma^4-(\lambda^4-6\lambda^2-3)\gamma^2+4\lambda=0.$$

Fiecare din aceste ecuații definește un fascicul de patru drepte OB_1 OB_2, OB_3, OB_4 și OC_1, OC_2, OC_3, OC_4. Aceste fascicule sînt reale sau imaginare după cum avem $\lambda>3$ sau $\lambda<3$.

Cînd avem $\lambda=3$ dreptele OA se reduc la cele două bisectoare ale axelor de coordonate, la fel ca și dreptele OB, OC.

Capitolul III

Dreapta şi planul în spaţiu

Faţă de un sistem de coordonate carteziene ortogonale $Oxyz$, o ecuaţie de gradul întîi în variabile x,y,z.

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (1)$$

reprezintă un plan. Coeficienţii A,B,C se numesc parametrii directori ai planului.

Alte forme ale acestei ecuaţii sînt:

— ecuaţia prin tăieturi: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$;

— ecuaţia tangenţială: $ux+vy+wz+1=0$;

— ecuaţia normală: $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-\delta=0$.

Fiind date trei puncte M_i (x_i, y_i, z_i), $(i=1,2,3)$, ecuaţia planului care trece prin ele este

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

sau

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2+\mu x_3}{1+\lambda+\mu}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2+\mu y_3}{1+\lambda+\mu}, \quad z=\frac{z_1+\lambda z_2+\mu z_3}{1+\lambda+\mu}$$

O dreaptă în spaţiu este dată de un sistem de două ecuaţii de gradul întîi în variabilele x, y, z. Astfel avem

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \text{(intersecţia a două plane)},$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \text{ (dreapta care trece prin două puncte)},$$

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \text{ (dreapta care trece printr-un punct)} \qquad (2)$$

Ecuaţiile parametrice ale dreptei care trece prin punctele P_1 şi P_2 sînt

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Unghiul dintre două plane

$$A_i x+B_i y+C_i z+D_i=0,\ (i=1,2)$$

este dat de formula

$$\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Condiţia ca cele două plane să fie paralele este

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2},$$

iar condiţia de perpendicularitate

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Unghiul dintre planul (1) şi dreapta (2) este dat de formula

$$\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l+m+n}}.$$

Condiţiile de paralelism şi perpendicularitate sînt în acest caz

$$Al+Bm+Cn=0,$$

respectiv

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

Unghiul dintre direcţiile de parametri directori (l_1, m_1, n_1) şi (l_2, m_2, n_2) este dat de formula

$$\cos\psi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

Cele două direcţii sînt paralele dacă

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$$

şi sînt perpendiculare dacă

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

Distanţa dintre punctele M_1 şi M_2 este

$$\overline{M_1M_2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

Distanța de la punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la planul (1) este

$$d=\left|\frac{Ax_0+By+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|.$$

Distanța de la punctul M_0 la dreapta (2) este

$$\delta=\sqrt{\frac{[m(z_1-z_0)-n(y_1-y_0)]^2+[n(x_1-x_0)-l(z_1-z_0)]^2+[l(y_1-y_0)-m(x_1-x_0)]^2}{l^2+m^2+n^2}}.$$

Lungimea perpendicularei comune dintre dreptele

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_1}, \tag{3}$$

este

$$d=\pm\frac{\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & x_1-x_2 \\ m_1 & m_2 & y_1-y_2 \\ n_1 & n & z_1-z_2 \end{vmatrix}}{\Delta}\sqrt{(l_1m_2-m_1l_2)^2+(m_1n_2-m_2n_1)^2+(n_1l_2-n_2l_1)^2},$$

unde

$$\Delta=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & p_1 \\ m_1 & m_2 & p_2 \\ n_1 & n_2 & p_3 \end{vmatrix},$$

p_1, p_2, p_3, fiind parametrii directori ai perpendicularei comune adică

$$p_1=m_1n_2-m_2n_1,\ p_2=n_1l_2,\ -n_2l_1,\ p_3=l_1m_2-l_2m_1.$$

Condiția ca dreptele (3) să fie coplanare este

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & x_1-x_2 \\ m_1 & m_2 & y_1-y_2 \\ n_1 & n_2 & z_1-z_2 \end{vmatrix}=0.$$

Ecuația

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

reprezintă fasciculul de plane care trec prin dreapta de intersecție a planelor

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Probleme

1. *Să se cerceteze dacă dreptele*

$$\begin{cases} x-1=y, \\ x+1=z; \end{cases} \quad \begin{cases} x=z, \\ x-y=2 \end{cases}$$

se intersectează.

Se duce perpendiculara comună a acestor două drepte. Să se găsească coordonatele piciorului perpendicularei pe prima dreaptă.

Soluție.

Se poate forma determinantul coeficienților acestor ecuații și se constată că el nu este nul, ceea ce demonstrează că dreptele nu sînt în același plan. Dar scriind ecuațiile sub forma

$$\begin{cases} x-y-1=0, \\ x+y-z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x-z=0, \\ x-y-2=0, \end{cases}$$

se observă că dreptele sînt situate în planele paralele

$$x-y-1=0, \quad x-y-2=0,$$

deci ele nu se intersectează.

Perpendiculara comună este intersecția planelor duse respectiv prin aceste drepte, perpendiculare la un plan, paralele la cele două drepte,

Observația anterioară ne arată că unul din aceste plane are ca ecuație

$$x-y=0.$$

Piciorul perpendicularei comune pe prima dreaptă este intersecția acestei drepte și a planului dus prin cea de a doua dreaptă, perpendicular pe planul $x-y=0$.

Dar, ecuația unui plan oarecare dus prin cea de a doua dreaptă are ecuația

$$x-y-2+\lambda(x-z)=0.$$

El va fi perpendicular pe planul $y-x=0$ dacă avem $\lambda+2=0$.

Piciorul perpendicularei comune pe prima dreaptă este definit de ecuațiile.

$$x-y=1, \quad x+y-z=0, \quad x+y-2z+2=0$$

2. *Să se determine ecuația proiecției ortogonale (d) a dreptei de ecuații.*

$$x-3z+1=0, \quad y-2z-3=0$$

pe planul

$$x-y+2z-1=0.$$

sistemul de coordonate fiind ortogonal.

Apoi să se determine cosinusurile directoare ale dreptei (d)

Soluție.

Ecuația unui plan care trece prin dreapta dată este

$$x-3z+1+\lambda(y-2z-3)=0$$

sau

$$x+\lambda y-(3+2\lambda)z+1-3\lambda=0.$$

Pentru ca acest plan să fie perpendicular pe planul dat trebuie ca $\lambda=1$.

Deci, ecuația planului perpendicular pe planul dat și care trece prin dreapta dată este

$$x-y+5z-2=0.$$

Rezultă că dreapta (d) are ecuațiile

$$\begin{cases} x-y+2z-1=0. \\ x+y-5z-2=0. \end{cases}$$

Parametrii directori ai acestei drepte sînt $l=3$, $m=7$, $n=2$, deci cosinusurile directoare sînt $\frac{3}{\sqrt{62}}, \frac{7}{\sqrt{62}}, \frac{2}{\sqrt{62}}$.

3. *Să se găsească ecuațiile proiecției dreptei*

$$\frac{x-a}{\alpha}=\frac{y-b}{\beta}=\frac{z-c}{\gamma}$$

pe planul

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Soluție.

Proiecția dreptei date este definită de intersecția planului dat cu planul dus prin dreapta dată perpendicular la acest plan.

Ecuaţia unui plan oarecare trecînd prin dreapta dată este

$$l(x-a)+m(y-b)+n(z-c)=0, \tag{1}$$

l, m, n, fiind legaţi prin relaţia

$$\alpha l+\beta m+\gamma n=0, \tag{2}$$

care exprimă că normala planului (1) este perpendiculară pe dreapta dată.

Planul (1) trebuind să fie perpendicular la planul

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

rezultă

$$Al+Bm+Cn=0. \tag{3}$$

Ecuaţia planului proiectant este

$$\begin{vmatrix} x-a & y-l & z-c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ A & B & C \end{vmatrix}=0$$

sau

$$(x-a)(B\gamma-C\beta)+(y-\beta)(C\alpha-A\gamma)+(z-c)(A\beta-B\alpha)=0.$$

Ecuaţiile

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

$$(x-a)(B\gamma-C\beta)+(y-\beta)(C\alpha-A\gamma)+(z-c)(A\beta-B\alpha)=0$$

sînt cele ale proiecţiei cerute.

4. *Faţă de un sistem de coordonate carteziene ortogonale Oxyz, se consideră punctele* $A(\alpha, 0,1)$, $B(-\alpha, 0,1)$, $C(0,\beta-1)$, $D(0,-\beta,-1)$ *şi se cere:*

1° *Să se scrie ecuaţiile feţelor şi ale înălţimilor tetraedrului ABCD.*

2° *Să se determine condiţia ca acest tetraedru să fie regulat.*

3° *Să se afle, în acest caz, aria unei feţe.*

Soluţie.

1° Planul (ABC) are ecuaţia

$$(ABC): 2y+\beta(z-1)=0.$$

Analog, ecuaţiile celorlalte feţe sînt:

$$(ABD): 2y-\beta(z-1)+0: \quad (ACD): 2x-\alpha(z+1)=0: \quad (BCD): 2x+\alpha(z-1)=0,$$

Înălțimea coborîtă din D pe planul (ABC) este dreapta care trece prin D, avînd ca parametri directori coeficienții planului (ABC), adică dreapta

$$(h_D): \frac{x}{0}=\frac{y+\beta}{2}=\frac{z+1}{\beta}.$$

Analog, celelalte înălțimi au ecuațiile

$$(h_A): \frac{x-\alpha}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{\alpha}; \quad (h_B): \frac{x+\alpha}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{-\alpha};$$

$$(h_C): \frac{x}{0}=\frac{y-\beta}{2}=\frac{z+1}{-\beta}.$$

2° Pentru ca tetraedrul $ABCD$ să fie regulat, este necesar și suficient ca $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{CD}$.

Avînd în vedere coordonatele punctelor A, B, C, D, această condiție ne dă

$$\alpha^2=\beta^2, 4\alpha^2=\alpha^2+\beta^2+4, \text{ sau } \alpha=\pm\sqrt{2}, \beta=\pm\sqrt{2}.$$

Avem deci patru soluții.

3° Lungimea înălțimii coborîte din D pe planul (ABC) este

$$h_d=\left|\frac{-4\beta}{\sqrt{4+\beta^2}}\right|=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Volumul tetraedrului $ABCD$ este

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 1 & 1 \\ -\alpha & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \beta & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{8}{3}.$$

Deci, aria unei fețe oarecare a tetraedrului este

$$S=\frac{3V}{h_d}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

5. *Fie $SABC$ un tetraedru și A', B', C' trei puncte pe muchile SA, SB, SC. Planele $A'BC$, $AB'C$ și ABC' se întîlnesc într-un punct M, iar planele $A'B'C'$, $A'BC'$ și $AB'C'$ într-un punct N.*

Să se arate că punctele M, N și S sînt coliniare.

N. Teodorescu

Soluție.

Raportăm figura la un sistem de coodonate proiective avînd ca tetraedru fundamental tetraedrul $SABC$. Deci,

$$S\ (1, 0, 0, 0,)\ A(0, 1, 0, 0),\ B(0, 0, 1, 0),\ C(0, 0, 0, 1)$$

Cele trei puncte A', B', C', vor avea coordonatele

$$A'\ (1, \alpha, 0, 0),\ B'\ (1, 0, \beta\ 0),\ C'\ (1, 0, 0, \gamma\ ),$$

Ecuația planului $A'BC$ este

$$(A'BC):\ \alpha x_1 - x_2 = 0,$$

Analog avem

$$(AB'C):\ \beta x_1 - x_3 = 0;\ (ABC'):\ \gamma x_1 - x_4 = 0.$$

Aceste trei plane se intersectează în punctul $M\ (1,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma)$. Planele $A'B'C$, $A'BC'$ și $AB'C'$ au ecuațiile

$$(A'B'C):\ \alpha\beta x_1 - \beta x_2 - \alpha x_3 = 0.$$
$$(A'BC'):\ \alpha\gamma x_1 - \gamma x_2 - \alpha x_4 = 0,$$
$$(AB'C'):\ \beta\gamma x_1 - \gamma x_3 - \beta x_4 = 0.$$

Aceste trei plane se intersectează în punctul $N\ (2, \alpha, \beta, \gamma)$.
Coordonatele unui punct de pe dreapta MN sînt

$$x_1 = \lambda + 2\mu,\ x_2 = (\lambda + \mu)\alpha,\ x_3 = (\lambda + \mu)\beta,\ x_4 = (\lambda + \mu)\gamma.$$

Pentru $\lambda = -\mu$ obținem coordonatele punctului S, deci punctele M, N și S sînt coliniare.

6. *Față de un sistem de coordonate carteziene ortogonale se consideră dreapta (d) de ecuații.*

$$(d):\ x - y - z = 0,\quad 5x - y - z = 0 \qquad (1)$$

și punctul M (3, 2, 1).

Să se determine distanța de la punctul M la dreapta (d), ecuația perpendicularei coborîte din M pe (d) și coordonatele proiecției lui M pe (d).

Soluție.

Rezolvînd sistemul (1) în raport cu y și z, deducem

$$y = 2x,\ z = 3x,$$

deci ecuația dreptei (d) este

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

Avînd în vedere formula care ne dă distanța de la un punct la o dreaptă, rezultă $d = 4\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Ecuația planului care trece prin M și este perpendicular pe dreapta (d) este

$$x + 2y + 3z - 10 = 0.$$

Acest plan intersectează dreapta (d) în punctul N, care este proiecția lui M pe dreapta (d).

Perpendiculara coborîtă din M pe dreapta (d) este dreapta MN, care are ecuația

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-2}$$

7. *Față de un sistem de coordonate carteziene ortogonale se consideră punctele* A $(1, 2\alpha, \alpha)$, B $(3, 2, 1)$, C $(\alpha, 0, \alpha)$, și D $(-1, 2, -3)$.

Să se determine valoarea lui α *pentru care fasciculul de plane care trece prin dreapta* AB *are un plan comun cu fasciculul de plane care trece prin dreapta* CD.

Soluție.

Dreapta AB are ecuațiile

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y-2}{2\alpha-2} = \frac{z-1}{\alpha-1}$$

sau

$$y - 2z = 0, \quad (\alpha - 1)x + y - 3\alpha + 1 = 0.$$

Fasciculul de plane care trec prn dreapta AB are ecuația

$$(\alpha - 1)x + y - 3\alpha + 1 - \lambda(y - 2z) = 0. \tag{1}$$

Pentru ca să existe un plan comun celor două fascicule trebuie să existe un plan din fasciculul (1) care să treacă prin dreapta CD.

Scriind că punctele C și D se află în planul (1), obținem ecuațiile

$$\alpha^2 + 2(\lambda + 1)\alpha - 1 = 0, \quad \alpha - 2\lambda - 1 = 0.$$

Din acest sistem deducem

$$\alpha_1 = -1, \ \lambda_1 = -1; \ \alpha_2 = \frac{1}{2}, \ \lambda_2 = -\frac{1}{4}.$$

8. *Într-un sistem de axe ortogonale* $Oxyz$ *se dau punctele* A_1 $(x_1, y_1, 0)$ *și* A_2 $(x_2, y_2, 0)$. *Pe segmentul* A_1A_2 *se construiește un triunghi echilateral* $A_1A_2A_3$, *astfel încît perimetrul său orientat față de axe să aibă ca*

sens pozitiv sensul $A_1A_2A_3$. Rotind triunghiul de unghiu Θ în jurul vectorului $\overrightarrow{A_1A_2}$, punctul A_3 trece în A_3'. Pe $A_1A_2A_3'$ se construieşte un tetraedru regulat al cărui al patrulea vîrf A_4 se găseşte în regiunea pozitivă a planului orienat $A_1A_2A_3'$. Se cere să se calculeze coordonatele punctelor $A_3A_3'A_4$ în funcţie de x_1,y_1,x_2,y_2, Θ şi coordonatele centrului de greutate a tetraedrului. Să se calculeze cosinusurile directoare ale celor şase muchii, cînd A_1A_2 este egal cu unu.

Soluţie.

Să notăm $A_1A_2=\rho$ şi cu φ unghiul făcut de $\overrightarrow{A_1A_2}$ cu planul xOy. Avem

$$x_2-x_1=\rho\cos\varphi,\quad y_2-y_1=\rho\sin\varphi. \tag{1}$$

Să notăm $A_3\ (x_3,\ y_3)$. Avem $(\widehat{A_1A_2,\ A_1A_3})=\frac{\pi}{2}$. Deci, unghiul polar al lui A_1A_3 *este* $\varphi+\frac{\pi}{3}$. Proiectînd conturul OA_1A_3 pe Ox şi Oy, obţinem

$$x_3=x_1+\rho\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right),\quad y_3=y_1+\rho\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)$$

sau

$$x_3=x_1+\rho\left(\cos\varphi\cos\frac{\pi}{3}-\sin\varphi\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

$$y_3=y_1+\rho\left(\sin\varphi\cos\frac{\pi}{3}+\cos\varphi\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Ţinînd seama de relaţiile (1), deducem

$$x_3=x_1+(x_2-x_1)\cos\frac{\pi}{3}-(y_2-y_1)\sin\frac{\pi}{3},$$

$$y_3=y_1+(y_2-y_1)\cos\frac{\pi}{3}+(x_2-x_1)\sin\frac{\pi}{3}.$$

sau

$$x_3=\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{(y_1-y_2)\sqrt{3}}{2},\quad y_3=\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{(x_2-x_1)\sqrt{3}}{2}. \tag{2}$$

Pentru a găsi coordonatele punctului A_3' să ducem înălţimile A_3H şi $A_3'H$. Vectorul $\overrightarrow{HA_3}$ are ca unghi polar $\varphi+\frac{\pi}{2}$ în planul xOy. Luăm acest unghi ca longitudinea lui $\overrightarrow{HA_3}$. Dacă observăm că sensul pozitiv de rotaţie, definit de vectorul $\overrightarrow{A_1A_2}$ în planul perpendicular A_3HA_3', este sensul

lui HA_3 către Hz, putem lua Θ ca latitudinea lui $\overrightarrow{HA_3'}$. Deci, cosinusurile directoare ale lui $\overrightarrow{HA_3}$ sînt

$$\cos\theta\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right),\ \cos\theta\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\theta$$

sau,

$$-\cos\theta\sin\varphi,\ \cos\theta\cos\varphi,\ \sin\theta. \tag{3}$$

În ceea ce privește $HA_3'=HA_3$ ea este egală cu $\rho\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Punctul H, mijlocul lui A_1A_2, are coordonatele $\frac{x_1+x_2}{2}$, $\frac{y_1+y_2}{2}$, 0.

Dacă proiectăm conturul OHA_3' pe axe avem

$$x_3'=\frac{x_1+x_2}{2}-\rho\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\sin\varphi,\ y_3'=\frac{y_1+y_2}{2}+\rho\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\cos\varphi,$$

$$z_3'=\rho\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta,$$

sau, ținînd seama de relațiile (1), rezultă

$$x_3'=\frac{x_1+x_2}{2}+(y_1-y_2)\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,$$

$$y_3'=\frac{y_1+y_2}{2}+(x_2-x_1)\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta.$$

$$z_3'=\rho\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta,$$

unde

$$\rho=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Făcînd $\Theta=0$ regăsim formulele (2).

Să notăm cu x_4, y_4, z_4 coordonatele lui A_4. Fie G centrul de greutate al triunghiului $A_1A_2A_3'$. Vectorul $\overrightarrow{GA_4}$ *are ca lungime*

$$\rho\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\rho\sqrt{\frac{2}{3}}$$

și este perpendicular pe $A_1A_2A_3'$. Dacă aducem pe Oz peste $\overrightarrow{GA_4}$, pe $\overrightarrow{Oy}$ peste GA_3', Ox trebuie să ia direcția și sensul lui $\overrightarrow{A_1A_2}$, deoarece A_4 este în

regiunea pozitivă a planului $A_1A_2A_3$. Deci $(\widehat{GA'_3}, \widehat{GA_4}) = \frac{\pi}{2}$ în planul A_3Hz orientat de $\overrightarrow{A_1A_2}$. Dacă luăm acum φ ca longitudine, trebuie să luăm $\Theta + \frac{\pi}{2}$ ca latitudine a lui $\overrightarrow{GA_4}$. Cosinusurile directoare ale lui $\overrightarrow{GA_4}$ se deduc din (3) prin înlocuirea lui Θ cu $\Theta + \frac{\pi}{2}$, adică sînt

$$\sin\theta \sin\varphi, \quad -\sin\theta\cos\varphi, \quad \cos\theta.$$

Deci coordonatele lui G sînt

$$\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{(y_1-y_2)\sqrt{3}}{6}\cos\theta, \quad \frac{y_1+y_2}{2} + \frac{(x_2-x_1)\sqrt{3}}{6}\cos\theta, \quad \rho\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta.$$

Dacă proiectăm conturul OGA_4 pe axe, avem

$$x_4 = \frac{x_1+x_2}{2} + \frac{(y_1-y_2)\sqrt{3}}{6}\cos\theta + \sqrt{\frac{2}{3}}\sin\theta\,(y_2-y_1) = \frac{x_1+x_2}{2} +$$

$$+ (y_1-y_2)\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\theta - \sqrt{\frac{2}{3}}\sin\theta\right),$$

$$y_4 = \frac{y_1+y_2}{2} - (x_1-x_2)\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\theta - \sqrt{\frac{2}{3}}\sin\theta\right),$$

$$z_4 = \rho\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta + \frac{\sqrt{2}}{3}\cos\theta\right).$$

Coordonatele centrului de greutate sînt de forma

$$\frac{x_1+x_2+x'_3+x_4}{4}, \quad \frac{y_1+y_2+y'_3+y_4}{4}, \quad \frac{z'_3+z_4}{4}$$

sau

$$\frac{x_1+x_2}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\theta - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\theta\right)(y_1-y_2).$$

$$\frac{y_1+y_2}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\theta - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\theta\right)(x_1-x_2),$$

$$\rho\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta\right).$$

Muchiile avînd lungimea egală cu unu, cosinusurile lor directoare sînt proiecțiile lor pe axe, adică

$$\overrightarrow{A_1A_2}: x_2 - x_1,\ y_2 - y_1, 0;$$

$$\overrightarrow{A_2A_3'}: \frac{x_1 - x_2}{2} + (y_1 - y_2)\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta, \frac{y_1 - y_2}{2} + (x_2 - x_1)\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta;$$

$$\overrightarrow{A_3'A_1}: \frac{x_1 - x_2}{2} - (y_1 - y_2)\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta, \frac{y_1 - y_2}{2} - (x_2 - x_1)\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta, -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta;$$

$$\overrightarrow{A_1A_4}\begin{cases} \frac{x_2 - x_1}{2} + (y_1 - y_2)\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\theta - \sqrt{\frac{2}{3}}\sin\theta\right), \frac{y_2 - y_1}{2} - (x_1 - x_2) \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{3}\sin\theta\right), \frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta + \sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta; \end{cases}$$

$$\overrightarrow{A_2A_4}\begin{cases} \frac{x_1 - x_2}{2} + (y_1 - y_2)\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\theta - \sqrt{\frac{2}{3}}\sin\theta\right), \frac{y_1 - y_2}{2} - (x_1 - x_2) \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\theta - \sqrt{\frac{2}{3}}\sin\theta\right), \frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta + \sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta; \end{cases}$$

$$\overrightarrow{A_3'A_4}\begin{cases} (y_2 - y_1)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta + \sqrt{\frac{2}{3}}\sin\theta\right), (x_1 - x_2)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta + \sqrt{\frac{2}{3}}\sin\theta\right), \\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta + \sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta. \end{cases}$$

9. *Se consideră dreptele definite de ecuațiile*

$$(d_1): \quad x - z - 1 = 0, \quad y + 2z - 3 = 0;$$
$$(d_2): \quad x + z - 3 = 0, \quad y - 3z - 1 = 0.$$

și punctul A (1, — 1,3).

Se cere:

1° *Să se scrie ecuația planului care trece prin A și este paralel cu dreptele (d_1) și (d_2).*

2° *Să se determne ecuațiile perpendicularelor coborîte din A pe dreapta (d_2).*

Soluție.

1° Fiind dată o dreaptă de ecuații

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases}$$

parametrii directori ai ei sînt minorii de ordinul al doilea ai matricei

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \right\|,$$

adică

$$l = b_1c_2 - b_2c_1,\ m = c_1a_2 - c_2a_1,\ n = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Deci, în cazul nostru cele două drepte au următorii parametri directori:

$$(d_1) : l_1 = 1,\ m_1 = -2,\ n_1 = 1,$$

$$(d_2) : l_2 = -1,\ m_2 = 3,\ n_2 = 1.$$

Ecuaţia unui plan care trece prin punctul A este

$$A(x-1)+B(y+1)+C(z-3)=0.$$

Pentru ca acest plan să fie paralel cu dreptele (d_1) şi (d_2) trebuie ca

$$Al_i+Bm_i+Cn_i=0,\ (i=1,2),$$

adică

$$A-2B+C=0,\ \ -A+3B+C=0.$$

De aici deducem $A=-5C$, $B=-2C$, deci ecuaţia planului căutat este

$$5x+2y-z=0.$$

2° Ecuaţia planului perpendicular pe dreapta (d_2) dus prin A este

$$l_2(x-1)+m_2(x+1)+n_2(x-3)=0,$$

adică

$$x-3y-z-1=0.$$

Acest plan intersectează dreapta (d_2) în punctul $B\left(\frac{34}{11}, \frac{8}{11}, \frac{1}{11}\right)$.

Dreapta căutată este dreapta AB, care are ecuaţia

$$\frac{x-1}{23} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-3}{-34},$$

10. *Faţă de un sistem de coordonate carteziene ortogonale se consideră planele de ecuaţii*

$$(P_1) : 4x-y+2z-5=0, \qquad (P_2) : 2x+3y-4z+1=0,$$

$$(P_3) : x+y-z=0, \qquad (P_4) : 3x-2y+3z+2=0.$$

şi se cere:

1° *Să se găsească ecuaţia planelor care trec prin punctul de intersecţie al planelor (P_1), (P_2), (P_3) şi sînt perpendiculare pe planul (P_4).*

2° *Să se arate că aceste plane formează un fascicul și că dreapta fixă a fasciculului este perpendiculară pe planul* (P_4).

Soluție.

1° Ecuația unui plan care trece prin punctul de intersecție al planelor (P_1), (P_2) și (P_3) este

$$4x-y+2z-5+\lambda(2x+3y-4z+1)+\mu(x+y-z)=0,$$

sau

$$(4+2\lambda+\mu)x+(-1+3\lambda+\mu)y+(2-4\lambda-\mu)z-5+\lambda=0.$$

Pentru ca acest plan să fie perpendicular pe planul (P_4) trebuie ca

$$3(4+2\lambda+\mu)-2(-1+3\lambda+\mu)+3(2-4\lambda-\mu)=0.$$

De aici deducem $6\lambda+\mu=10$, deci ecuația planului este

$$2(7-2\lambda)x+3(3-\lambda)y+2(\lambda-4)z+\lambda-5=0, \qquad (1)$$

2° Ecuația (1) se mai poate scrie sub forma

$$14x+9y-8z-5-\lambda(4x+3y-2z-1)=0,$$

deci aceste plane formează un fascicul.

Dreapta fixă a acestui fascicul are ecuațiile

$$14x+9y-8z-5=0,\quad 4x+3y-2z-1=0.$$

Parametrii directori ai acestei drepte sînt $l=6$, $m=-4$, $n=6$, deci această dreaptă este perpendiculară pe planul (P_4).

11. *Se consideră planele de ecuații*

$$(P_1):(1-t^2)x+(1+t^2)y+2tz+a_1+b_1t+c_1t^2=0,$$

$$(P_2):2t^2x+y-2tz+a_2+b_2t+c_2t^2=0,$$

unde a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 sînt constante.

1° *Să se arate că planele* (P_1) *și* (P_2) *trec fiecare printr-un punct fix.*

2° *Fiind dată o constantă* k, *să se arate că există un punct fix situat la distanța* k *de planele* (P_1). *Analog pentru* (P_2).

3° Să se arate că există o direcție fixă care să facă un unghi constant cu toate planele (P_1). Analog pentru (P_2).

Soluție.

1° Scriind ecuația planului (P_1) sub forma

$$x+y+a_1+t(2z+b_1)-t^2(x-y-c_1)=0,$$

rezultă că planele (P_1) trec prin punctul de intersecție al planelor

$$x+y+a_1=0,\quad 2z+b_1=0,\quad x-y-c_1=0,$$

adică prin punctul fix M: $\left(\frac{c_1-a_1}{2},\ -\frac{a_1+c_1}{2},\ \frac{b_1}{2}\right)$.

Analog, planele (P_2) trec prin punctul fix $M_2\left(-\frac{c_2}{2},\ -a_2,\ \frac{b_2}{2}\right)$.

2° Fie N_1 (X, Y, Z) un punct oarecare din spaţiu. Distanţa de la acest punct la planul (P_1) este

$$\frac{(1-t^2)X+(1+t^2)Y+2tZ+a_1+b_1t+c_1t^2}{\sqrt{2}(1+t^2)}$$

Scriind că această distanţă este egală cu k, obţinem

$$t^2(-X+Y+c_1-\sqrt{2}k)+t(2Z+b_1)+X+Y-a_1-\sqrt{2}k=0.$$

Avînd în vedere că această relaţie trebuie să aibă loc pentru orice t, rezultă

$$\begin{cases} X-Y-c_1+\sqrt{2}k=0, \\ 2Z+b_1=0 \\ X+Y+a_1-\sqrt{2}k=0. \end{cases}$$

De aici deducem

$$X=\frac{c_1-a_1}{2},\quad Y=\sqrt{2}k-\frac{a_1+c_1}{2},\quad Z=-\frac{b_1}{2},$$

deci punctul $M_1\left(\frac{a_1-a_1}{2},\quad \sqrt{2}k-\frac{a_1+c_1}{2},\quad -\frac{b_1}{2}\right)$ se află la distanţa k de orice plan (P_1).

Analog, punctul $N_2\left(k-\frac{c_2}{2},\ k-a_2,\ \frac{b_1}{2}\right.$ se află distanţa k de orice plan (P_2).

3° Fie dreapta

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}.$$

Unghiul dintre această dreaptă şi planul (P_1) este dat de formula

$$\sin\varphi=\frac{l(1-t^2)+m(1+t^2)+2nt}{\sqrt{2(l^2+m^2+n^2)}(1+t^2)}.$$

De aici rezultă

$$[l-m+\sqrt{2(l^2+m^2+n^2)}\sin\varphi]t^2-2nt-l-m+\sqrt{2(l^2+m^2+n^2)}\sin\varphi=0.$$

Avînd în vedere că această relaţie trebuie să aibă loc pentru orice t, rezultă

$$\begin{cases} l-m+\sqrt{2(l^2+m^2+n^2)}\sin\varphi=0, \\ l+m-\sqrt{2(l^2+m^2+n^2)}\sin\varphi=0, \\ n=0, \end{cases}$$

adică $l=n=0, \varphi=45°$.

Deci, orice plan (P_1) face cu orice dreaptă paralelă cu axa Oy $(x=z=0)$ un unghiu de 45°.

Analog, orice plan (P_2) face cu orice dreaptă paralelă cu bisectoarea unghiului xOz $(y=0,\ x=z)$ un unghi de 45°.

12. *Fie, într-un sistem de coordonate rectangulare, patru plane* P_i *de ecuații*

$$(P_i): A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

care determină un tetraedru de volum V.

Să se demonstreze că

$$V = \left| \frac{\Delta^3}{6 d_1 d_2 d_3 d_4} \right|,$$

unde Δ *este determinantul format cu coeficienții celor patru plane, iar* d_i *complementul algebric al elementului* D_i *din acest determinant.*

Soluție.

Notînd cu P_{ijk} punctul de intersecție al planelor (P_i), (P_j), (P_k), obținem

$$P_{123}\left(\frac{a_4}{d_4}, \frac{b_4}{d_4}, \frac{c_4}{d_4}\right), \qquad P_{234}\left(\frac{a_1}{d_1}, \frac{b_1}{d_1}, \frac{c_1}{d_1}\right),$$

$$P_{341}\left(\frac{a_2}{d_2}, \frac{b_2}{d_2}, \frac{c_2}{d_2}\right), \qquad P_{412}\left(\frac{a_3}{d_3}, \frac{b_3}{d_3}, \frac{c_3}{d_3}\right).$$

Avem, deci,

$$y = \pm \frac{1}{6 d_1 d_2 d_3 d_4} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Avînd în vedere că

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \Delta^3,$$

rezultă că

$$V = \left| \frac{\Delta^3}{6 d_1 d_2 d_3 d_4} \right|.$$

13. *Ecuația.*

$$\alpha (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1)^2 + 2\beta (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1)(a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2) + \gamma (a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2)^2 = 0 \qquad (1)$$

reprezintă două plane.

Să se găsească condiția ca aceste două plane să fie perpendiculare (sistemul de axe este ortogonal).

Soluție.

Dacă notăm cu

$$\lambda_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{\alpha}, \qquad \lambda_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{\alpha},$$

din ecuația (1) deducem ecuațiile celor două plane

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1-\lambda_1(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0,$$
$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1-\lambda_2(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0,$$

sau

$$(a_1-\lambda_1a_2)x+(b_1-\lambda_1b_2)y+(c_1-\lambda c_2)z+(d_1-\lambda d_2)=0,$$
$$(a_1-\lambda_2a_2)x+(b_1-\lambda_2b_2)y+(c_1-\lambda v_2)z+(d_1-\lambda d_2)=0.$$

Condiția ca aceste două plane să fie perpendiculare este

$$(a_1-\lambda_1a_2)(a_1-\lambda_2a_2)+(b_1-\lambda_1b_2)(b_1-\lambda_2b_2)+(c_1-\lambda_1c_2)(c_1-\lambda_2c_2)=0,$$

sau

$$\lambda_1\lambda_2(a_2^2+b_2^2+c_2^2)-(\lambda_1+\lambda_2)(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)+a_1^2+b_1^2+c_1^2=0.$$

Avînd în vedere expresiile coeficienților λ_1 și λ_2, această relație se scrie

$$\gamma(a_2^2+b_2^2+c_2^2)+\beta(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)+\alpha(a_1^2+b_1^2+c_1^2)=0. \qquad (2)$$

Dacă ecuațiile

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \qquad a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

reprezintă două plane scrise sub forma normală, iar unghiul acestor plane este θ, formula (2) ia forma

$$\alpha+\gamma+2\beta\cos\theta=0.$$

14. *Se iau pe laturile unui triedru cu vîrful în O trei lungimi* $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, *astfel încît să avem*

$$\frac{1}{\overline{OA}}+\frac{1}{\overline{OB}}+\frac{1}{\overline{OC}}=\frac{1}{a}.$$

Să se demonstreze că planul ABC trece printr-un punct fix și să se găsească locul acestui punct cînd a variază.

Soluție.

Luînd ca axe laturile triedrului și punînd $\overline{OA}=\alpha$, $\overline{OB}=\beta$, $\overline{OC}=\gamma$, ecuația planului *ABC* este

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{x}{\gamma}-1=0.$$

Dacă avem în vedere relația

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{a}{\beta}+\frac{a}{\gamma}-1=0,$$

rezultă

$$\frac{x-a}{\alpha}+\frac{y-a}{\beta}+\frac{z-a}{\gamma}=0.$$

Această ecuație ne arată că planul ABC trece prin punctul fix

$$x=a,\ y=a,\ z=a.$$

Dacă a variază, locul acestui punct este dreapta

$$x=y=z.$$

Această dreaptă este intersecția planelor duse prin fiecare latură și bisectoarea unghiului opus.

15. *Să se găsească locul geometric al segmentelor de lungime constantă care se sprijină pe două drepte date din spațiu.*

Soluție.

Luăm ca axă Oz perpendiculara comună, O fiind la egală distanță de cele două drepte. Dacă notăm cu (D) și (D') dreptele date, luăm ca axe Ox și Oy bisectoarele paralelelor duse prin O la dreptele (D) și (D').

Poziția lui (D) în raport cu sistemul de axe ortogonale astfel obținut se definește prin $\overline{OA}=h$ și $(\widehat{Ox, D})=\alpha$, A fiind punctul de intersecție al dreptei D cu axa Oz. Se observă că pentru (D') este suficient să schimbăm h în $-h$ și α în $-\alpha$.

Să definim segmentul MM' prin $\overline{AM}=\rho$, $\overline{A'M'}=\rho'$. Acești doi parametri ρ și ρ' sînt legați prin relația care ne arată că MM' are lungimea dată $2l$. Coordonatele punctelor M și M' sînt

$$M(\rho\cos\alpha,\ \rho\sin\alpha,\ h),\ M'(\rho'\cos\alpha,\ -\rho,\ \sin\alpha,\ -h)$$

Avem deci,

$$(\rho-\rho')^2\cos^2\alpha+(\rho+\rho')^2\sin^2\alpha+4h^2=4l^2. \tag{1}$$

Să căutăm acum ecuațiile dreptei MM'. Ecuația unui plan care trece prin dreapta (D) este

$$(x\sin\alpha-y\cos\alpha)+\lambda(z-h)=0. \tag{2}$$

Punînd condiția ca acest plan să conțină punctul M', obținem

$$\rho\sin\alpha\cos\alpha=\lambda h. \tag{3}$$

Din relaţia (3) scoatem pe λ. Înlocuind în (2) avem ecuaţia planului (D', M). În sfîrşit, ecuaţiile lui MM' sînt

$$\left.\begin{aligned} h(x\sin\alpha - y\cos\alpha) + \rho'(z-h)\sin\alpha\cos\alpha = 0, \\ h(x\sin\alpha + y\cos\alpha) - \rho(z+h)\sin\alpha\cos\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Vom obţine ecuaţia locului geometric eliminînd pe ρ, ρ' între relaţiile (1) şi (4). Din (4) deducem

$$\rho = \frac{h}{z+h}\left(\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha}\right), \quad \rho' = \frac{h}{h-z}\left(\frac{x}{\cos\alpha} - \frac{y}{\sin\alpha}\right),$$

de unde

$$\rho - \rho' = \frac{2h}{h^2-z^2}\left(\frac{hy}{\sin\alpha} - \frac{zx}{\cos\alpha}\right), \quad \rho + \rho' = \frac{2h}{h^2-z^2}\left(\frac{hx}{\cos\alpha} - \frac{zy}{\sin\alpha}\right).$$

Înlocuind în (1), ecuaţia locului geometric se scrie

$$\left(zx - hy\operatorname{ctg}\alpha\right)^2 + \left(zy - hx\operatorname{tg}\alpha\right)^2 = \left(\frac{l^2}{h^2} - 1\right)\left(z^2 - h^2\right)^2.$$

16. *Să se arate că trei plane perpendiculare pe feţele unui triedru, duse prin laturile opuse, se întîlnesc după o dreaptă.*

Soluţia 1.

Să luăm trei axe rectangulare oarecare, trecînd prin vîrful triedrului şi să notăm cu (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3) parametrii directori ai dreptelor OA_1, OA_2, OA_3. Planul OA_2A_3 are ecuaţia

$$(b_2c_3 - c_2b_3)x + (c_2a_3 - a_2c_3)y + (a_2b_3 - b_2a_3)z = 0.$$

Planul perpendicular pe OA_2A_3 dus prin dreapta OA_1 are ecuaţia

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ b_2c_3 - c_2b_3 & c_2a_3 - a_2c_3 & a_2b_3 - b_2a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

sau

$$(a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3)(a_2x + b_2y + c_2z) - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)(a_3x + b_3y + c_3z) = 0.$$

Celelalte două plane analoge au ecuaţiile

$$(a_2a_1 + b_2b_1 + c_2c_1)(a_3x + b_3y + c_3z) - (a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3)(a_1x + b_1y + c_1z) = 0$$

şi

$$(a_3a_2 + b_3b_2 + c_3c_2)(a_1x + b_1y + c_1z) - (a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1)(a_2x + b_2y + c_2z) = 0.$$

Adunînd ecuaţiile celor trei plane, se obţine o sumă identic nulă, ceea ce arată că aceste trei plane trec prin aceeaşi dreaptă.

Soluția 2.

Fie

$$P_i \equiv A_i x + B_i y + C_i z = 0, \ (i = 1, 2, 3)$$

ecuațiile celor trei fețe ale triedrului. Planul care trece prin dreapta de intersecție a primelor două plane are ecuația

$$P_1 + \lambda P_2 = 0 ;$$

acest plan este perpendicular la fața a treia a triedrului dacă avem

$$A_3(A_1 + \lambda A_2) + B_3(B_1 + \lambda B_2) + C_3(C_1 + \lambda C_2) = 0$$

Deci, ecuația unuia dintre planele considerate este

$$(A_2A_3 + B_2B_3 + C_2C_3)P_1 - (A_3A_1 + B_3B_1 + C_3C_1)P_2 = 0.$$

Analog, celelalte două plane căutate au ecuațiile

$$(A_3A_1 + B_3B_1 + C_3C_1)P_2 - (A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2)P_3 = 0$$

și

$$(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2)P_3 - (A_2A_3 + B_2B_3 + C_2C_3)P_1 = 0.$$

Adunînd aceste trei ecuații obținem o sumă identic nulă, deci cele trei plane se intersectează după o dreaptă.

17. *Dacă un tetraedru are două perechi de muchii opuse perpendiculare, să se arate că :*

1° *Muchiile celei de a treia pereche sînt de asemenea perpendiculare.*

2° *Înălțimile tetraedrului sînt concurente.*

3° *Perpendicularele comune muchiilor opuse se intersectează în punctele de întîlnire ale înălțimilor.*

4° *Perpendicularele la fețele tetraedrului, duse prin centrele lor de greutate, sînt concurente.*

5° *Suma pătratelor perechilor de muchii opuse este constantă.*

Soluție.

1° Luăm ca axe muchiile $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ și notăm $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$, $\widehat{BOC} = \lambda$, $\widehat{COA} = \mu$, $\widehat{AOB} = \nu$. Muchiile $\overline{OC}$ și $\overline{AB}$, care au ca parametri directori $(0, 0, 1)$ și $(a, -b, 0)$, sînt perpendiculare dacă

$$\frac{\cos\lambda}{a} = \frac{\cos\mu}{b}.$$

In mod analog OA și BC sînt perpendiculare dacă avem

$$\frac{\cos\mu}{b} = \frac{\cos\nu}{c}.$$

De aici rezultă că dacă $OC \perp AB$ și $OA \perp BC$, atunci și $OB \perp AC$.

2° Dacă punem

$$S = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2xz\cos\mu + 2xy\cos\nu,$$

înălțimile care pornesc din vîrfurile A, B, C, O au ecuațiile

$$\begin{aligned}
&(h_A): S'_y = 2a\cos\nu, && S'_z = 2a\cos\mu;\\
&(h_B): S'_z = 2b\cos\lambda, && S'_x = 2b\cos\nu;\\
&(h_C): S'_x = 2c\cos\mu, && S'_y = 2c\cos\lambda;\\
&(h_D): a'.S_x = b.S'_y.cS'_z.
\end{aligned}$$

Notînd cu k valoarea comună a rapoartelor $\frac{a}{\cos\lambda}, \frac{b}{\cos\mu}, \frac{c}{\cos\nu}$, rezultă că cele patru înălțimi se intersectează în punctul H de intersecție al planelor definite de ecuațiile

$$S'_x = \frac{2bc}{k},\ S'_y = \frac{2ca}{k},\ S'_z = \frac{2ab}{k}.$$

3° Perpendiculara comună a dreptelor AB, OC are ecuațiile

$$\begin{cases} x\cos\mu + y\cos\lambda + z = a\cos\mu, \\ (a - b\cos\nu)\,x - (b - a\cos\nu)\,y = 0, \end{cases}$$

sau

$$S'_z = \frac{2ab}{k},\ a\,S'_x = bS'_y.$$

Această dreaptă trece, deci, prin punctul H de intersecție al înălțimilor tetraedrului.

4° Perpendicularele pe fețele tetraedrului duse prin centrele de greutate ale fețelor.

$$\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, 0\right), \left(0, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}, \right), \left(\frac{a}{3}, 0, \frac{c}{3}\right), \left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$$

au ecuațiile

$$S'_x = \frac{2a}{3} + \frac{2b}{3}\cos\nu,\ S'_y = \frac{2b}{3} + \frac{2a}{3}\cos\nu;$$

$$S'_y = \frac{2b}{3} + \frac{2c}{3}\cos\lambda,\ S'_z = \frac{2c}{3} + \frac{2b}{3}\cos\lambda;$$

$$S'_z = \frac{2c}{3} + \frac{2a}{3}\cos\mu,\ S'_x = \frac{2a}{3} + \frac{2c}{3}\cos\mu;$$

$$a\left(S'_x - \frac{2a}{3} - \frac{2b}{3}\cos\nu - \frac{2c}{3}\cos\mu\right) = b\left(S'_y - \frac{2b}{3} - \frac{2a}{3}\cos\nu - \frac{2b}{3}\cos\lambda\right) =$$

$$= c\left(S'_z - \frac{2c}{3} - \frac{2b}{3}\cos\lambda - \frac{2a}{3}\cos\mu\right).$$

Aceste perpendiculare se intersectează în punctul de intersecție al planurilor definite de ecuațiile

$$S'_x=\frac{2a}{3}+\frac{2bc}{3k},\quad S'_y=\frac{2b}{3}+\frac{2ca}{3k},\quad S'_z=\frac{2c}{3}+\frac{3ab}{3k}.$$

5° Suma pătratelor muchiilor $\overline{AB}$, $\overline{OC}$ este

$$\overline{AB}^2+\overline{OC}^2=a^2+b^2-2ab\cos\upsilon+c^2,$$

sau

$$\overline{AB}^2+\overline{OC}^2=a^2+b^2+c^2-\frac{2abc}{k}.$$

Suma pătratelor a două muchii opuse este deci constantă.

18. Considerăm două plane (P), (Q) de ecuații

$$\begin{aligned}(P)&: ax+bx+cx=0,\\ (Q)&: a(y+z+4)-b(x+7z-8)+c(x-y-2)=0\end{aligned}\qquad(1)$$

1° *Să se determine a, b, c, astfel încît planele să fie paralele. Planele astfel obținute formează un paralelipiped; să i se calculeze coordonatele vîrfurilor și volumul.*

2° *Ce relație trebuie să existe între a, b, c, pentru ca (P) și (Q) să fie perpendiculare. Să se arate că diedrele drepte astfel formate se împart în două familii, pentru fiecare din ele fiecare față a diedrului trece printr-o dreaptă fixă.*

Soluție.

1° Condițiile de paralelism ale planelor (P) și (Q) se scriu

$$\frac{c-b}{a}=\frac{a-c}{b}=\frac{a-7b}{c}.\qquad(2)$$

Luăm ca necunoscută auxiliară S, valoarea comună a acestor rapoarte. Obținem ecuațiile

$$aS-b+c=0,\quad a-bS-c=0,\quad a-7b-cS=0\qquad(3)$$

Pentru ca un sistem liniar și omogen în a, b, c, să admită soluții diferite de zero trebuie ca

$$\begin{vmatrix}-S & -1 & 1\\ 1 & -S & -1\\ 1 & -7 & -S\end{vmatrix}=0,$$

sau

$$S^3-7S+6=0.$$

Această ecuație are ca rădăcini pe $S_1=1$, $S_2=2$, $S_3=-3$.

Trebuie să găsim valorile lui a, b, c, care corespund la fiecare din aceste trei rădăcini.

Pentru $S_1=1$, primele două ecuații (3) ne dau prin adunare și scădere $b=0$, $a=c$.

În acest caz, ecuațiile (1) se scriu

$$(P_1): x+z=0 \qquad (Q): x+z+2=0.$$

Pentru $S=2$, folosind primele două ecuații (3), găsim $a=-3b$, $c=-5b$, deci ecuațiile (1) devin

$$(P_2): 3x-y+5z=0; \qquad (Q_2): 3x-y+5z+5=0.$$

Pentru $S=-3$, în mod analog, rezultă $b=2a$, $c=-5a$, deci

$$(P_3): x-2y-5z=0; \qquad (Q_3): x-2y-5z-10=0$$

Cele șase plane, fiind două cîte două paralele, constituie cele șase fețe ale paralelipipedului. Planele (P_1), (P_2), (P_3) se intersectează în origine, care este primul vîrf.

Un alt vîrf A_1 se găsește la intersecția planelor (P_2), (P_3), (Q_1), care are drept coordonate $x_1=-3$, $y_1=-4$, $z_1=1$.

Vîrful A_2 se găsește la intersecția planelor (P_3), (P_1), (Q_2), iar A_3 la intersecția planelor (P_1), (P_2), (Q_3): $x_2=1$, $y_2=3$, $z_2=-1$; $x_3=1$, $y_3=-2$, $z_3=-1$.

Celelalte vîrfuri B_1, B_2, B_3, C sînt date de relațiile

$$\vec{OB_1}=\vec{OA_2}+\vec{OA_3}, \quad \vec{OB_2}=\vec{OA_3}+\vec{OA_1}, \quad \vec{OB_3}=\vec{OA_1}+\vec{OA_2},$$

$$\vec{OC}=\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\vec{OA_3},$$

deci rezultă

$$B_1: x'_1=x_2+x_3=2, \quad y'_1=y_2+y_3=-1, \quad z'_1=z_2+z_3=-2;$$
$$B_2: x'_2=x_3+x_1=-2, \quad y'_2=y_3+y_1=-6, \quad z'=z_3+z_1=0;$$
$$B_3: x'_3=x_1+x_2=-2, \quad y'_3=y_1+y_2=-1, \quad z'_3=z_1+z_2=0:$$

$$C: x'=-1, \; y'=-3, \; z'=-1.$$

Se observă că punctul C se găsește la intersecția planelor (Q_1), (Q_2), (Q_3), deci este punctul fix prin care trec toate planele Q. Ecuația $Q=0$ reprezintă o rețea de plane. Se verifică că coordonatele lui C anulează separat coeficienții parametrilor a, b, c din Q,

Volumul paralelipipedului este egal cu de șase ori volumul tetraedrului $OA_1A_2A_3$. Putem lua ca bază a tetraedrului triunghiul OA_1A_2 și ca bază a paralelipipedului paralelogramul $OA_1A_2B_3$.

Aplicînd formula care ne dă volumul unui tetraedru, avem

$$\pm V=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=10.$$

Volumul este deci egal cu 10.

2° Condiția de ortogonalitate a planelor (P) și (Q) este

$$a(c-a)+b(a-c)+c(a-7b)=0.$$

sau

$$c(a-4b)=0,$$

care se descompune în:

1) $c=0$. Ecuațiile (1) se scriu

$$\begin{cases} ax+by=0 \\ -bx+ay+(a-7b)z+4a-8b=0. \end{cases}$$

Planele (P) trec mereu prin Oz și planele (Q) prin dreapta

$$y+z+4=0,\ x+7z+8=0.$$

2) $a=4b$. Ecuațiile (1) devin

$$\begin{cases} b(4x+y)+cz=0, \\ (c-b)x+(4b-c)y-3bx+8b-2c=0. \end{cases}$$

Planele (P) trec prin dreapta fixă

$$4x+y=0,\ z=0,$$

iar planele (Q) prin dreapta

$$-x+4y-3z+8=0,\ x-y-2=0.$$

19. *Față de un sistem de coordonate carteziene ortogonale $Oxyz$ se consideră trei puncte A (1, 2, 3), B $(2, \sqrt{3}+2, \sqrt{2}+3)$, C $(3,2,3-\sqrt{2})$.*

Să se verifice că aceste trei puncte formează un triunghi dreptunghic isoscel și să se determine coordonatele punctelor care împreună cu acestea formează un club.

Soluție.

Avem $$\overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{6}.$$

Parametrii directori ai dreptelor AB și AC sînt

AB: $l_1=1$, $m_1=\sqrt{3}$, $n_1=\sqrt{2}$; AC: $l_2=2$, $m_2=0$, $n_2=-\sqrt{2}$,

deci

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0,$$

adică cele două drepte sînt perpendiculare. Triunghiul ABC este un triunghi dreptunghic isoscel.

Vom face acum o schimbare ortogonală de axe care să transforme punctele A, B, C, în punctele O $(0,0,0)$, B' $(\sqrt{6}, 0, 0)$, C' $(0, \sqrt{6}, 0)$.

Transformarea ortogonală este de forma

$$\begin{cases} x=a_1x'+a_2y'+a_3z'+a, \\ y=b_1x'+b_2y'+b_3z'+b' \\ z=c_1x'+c_2y'+c_3z'+c, \end{cases} \tag{1}$$

unde

$$\sum_1^3 a_i^2=\sum_1^3 b_i^2=\sum_1^3 c_i^2=1, \sum_1^3 a_i\ b_i=\sum_1^3 a_i\ c_i=\sum_1^3 b_i c_i=0. \tag{2}$$

Scriind că ecuațiile (1) transformă punctul $A(x=1,\ y=2,\ z=3)$ în punctul $O(x'=0,\ y'=0,\ z'=0)$, obținem $a=1$, $b=2$, $c=3$.

Scriind acum că ecuațiile (1) transformă punctul $B(x=2,\ y=\sqrt{3}+2\ z=\sqrt{2}+3)$ în $B'(x'=\sqrt{6}, 0, 0)$ și $C(x=3,\ y=2,\ z=3-\sqrt{2})$ în $C'(x'=0.\ y'=\sqrt{6},\ z'=0)$, găsim

$$a_1=\frac{1}{\sqrt{6}},\ b_1=\frac{1}{\sqrt{2}},\ c_1=\frac{1}{\sqrt{3}},\ a_2=\frac{2}{\sqrt{6}},\ b=0,\ c_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Înlocuind aceste valori în ecuațiile (2), găsim

$$a_3^2=\frac{1}{6},\ b_3^2=\frac{1}{2},\ c_3^2=\frac{1}{3},\ a_3b_3=\frac{-1}{2\sqrt{3}},\ a_3c_3=\frac{1}{3\sqrt{2}},\ b_3c_3=-\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

De aici deducem

$$a_3=\varepsilon\frac{1}{\sqrt{6}},\ b_3=-\varepsilon\frac{1}{\sqrt{2}},\ c_3=\varepsilon\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad (\varepsilon=\pm 1).$$

Vom egala $\varepsilon=-1$.

Transformarea (1) este deci

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{6}}(x'+y'-z')+1, \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+z')+2, \\ z=\frac{1}{\sqrt{3}}(x'-y'-z')+3, \end{cases} \tag{1'}$$

Punctele care împreună cu O, B' și C' formează un cub sînt

$$D'(x'=\sqrt{6},y'=\sqrt{6},z'=0), \qquad M_1'(x'=0,y'=0,z'=\sqrt{6}),$$
$$N_1'(x'=\sqrt{6},y'=0,z'=\sqrt{6}), \qquad P_1'(x'=0,y'=\sqrt{6},z'=\sqrt{6}),$$
$$Q_1'(x'=\sqrt{6},y'=\sqrt{6},z'=\sqrt{6}),$$

sau

$$D'(x'=\sqrt{6},y'=\sqrt{6},z'=0), \qquad M_2'(x'=0,y'=0,z'=-\sqrt{6}),$$
$$N_2'(x'=\sqrt{6},y'=0,z'=-\sqrt{6}), \qquad P_2'(x'=0,y'=\sqrt{6},z'=-\sqrt{6}),$$
$$Q_2'(x'=\sqrt{6},y'=\sqrt{6},z'=-\sqrt{6}).$$

Prin transformarea (1') aceste puncte devin

$$D(4,\sqrt{3}+2,3),\ M_1(0,\sqrt{3}+2,3-\sqrt{2}),\ N_1(1,2\sqrt{3}+2,3),\ P_1(2,\sqrt{3}+2,3-2\sqrt{2}),$$
$$Q_1(3,2\sqrt{3}+2,3-\sqrt{2})$$

și

$$D(4,\sqrt{3}+2,3),\ M_2(2,2-\sqrt{3},3+\sqrt{2}).N_2(3,2,3+2\sqrt{2}),P_2(4,2-\sqrt{3},3),$$
$$Q_2(5,2,3+\sqrt{2}).$$

Deci, cu punctele A, B, C, putem forma două cuburi $ABCDM_1N_1P_1Q_1$ și $ABCDM_2N_2P_2Q_2$.

20. *Fiind date două puncte în spațiu* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *și* $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *să se determine raportul în care segmentul* $\overline{M_1M_2}$ *este împărțit de planul*

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

Soluție.

Fie punctul M în care planul (1) intersectează dreapta M_1M_2. Notăm

$$\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}}=\lambda.$$

Coordonatele punctului M sînt

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Scriind că acest punct se află în planul (1), deducem

$$A(x_1+\lambda x_2)+B(y_1+\lambda y_2)+C(z_1+\lambda z_2)+D(1+\lambda)=0,$$

de unde rezultă

$$\lambda=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}.$$

Deci

$$\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}}=\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}.$$

21. *Considerăm în spaţiu un poligon strîmb determinat de punctele* $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$) *şi planul* (P) *de ecuaţie*

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Notăm cu P_i *punctele în care planul* (P) *intersectează dreapta* M_iM_{i+1}.

Să se demonstreze că

$$\frac{\overline{P_1M_1}}{\overline{P_1M_2}} \cdot \frac{\overline{P_2M_2}}{\overline{P_2M_3}} \cdots \frac{\overline{P_nM_n}}{\overline{P_nM_1}} = 1$$

Soluţie.

Avînd în vedere rezultatul din problema 20 rezultă că punctul P_i împarte segmentul M_iM_{i+1} în raportul

$$\frac{\overline{P_iM_i}}{\overline{P_iM_{i+1}}} = \frac{\delta_i}{\delta_{i+1}},$$

unde am notat

$$\delta_i = Ax_i + By_i + Cz_i + D, \quad (i=1;\ldots,n;\delta_{n+1}=\delta_1).$$

Deci,

$$\frac{\overline{P_1M_1}}{\overline{P_1M_2}} \cdot \frac{\overline{P_2M_2}}{\overline{P_2M_3}} \cdots \frac{\overline{P_nM_n}}{\overline{P_nM_1}} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \cdots \frac{\delta_n}{\delta_1} = 1.$$

22. Un triunghi ABC, de arie constantă, se mişcă astfel încît cele trei vîrfuri descriu respectiv trei axe rectangulare Ox, Oy, Oz. Se cere:

1° *Locul geometric al proiecţiei originei O pe planul ABC.*

2° *Locul geometric al punctului de intersecţie al medianelor triunghiului.*

3° *Locul geometric al centrului cercului înscris în triunghi.*

Soluţie.

1° Să punem $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ şi să notăm aria triunghiului ABC prin $\frac{k^2}{2}$. Se ştie că pătratul ariei triunghiului ABC este egal cu suma pătratelor ariilor triunghiurilor OAB, OBC, OCA, *adică*

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=k^4 \tag{1}$$

Ecuaţia planului ABC este

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{2}$$

Perpendiculara coborîtă din origine pe acest plan are ecuaţia

$$ax=by=cz. \tag{3}$$

Ecuația locului geometric se obține eliminînd a, b, c, între ecuațiile (1), (2), și (3). Din ecuațiile (2) și (3) rezultă

$$\frac{x}{\frac{1}{a}}=\frac{y}{\frac{1}{b}}=\frac{z}{\frac{1}{c}}=\frac{x^2+y^2+z^2}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}=x^2+y^2+z^2,$$

deci

$$a=\frac{x^2+y^2+z^2}{x},\ b=\frac{x^2+y^2+z^2}{y},\ c=\frac{x^2+y^2+z^2}{z}.$$

Înlocuind pe a, b, c, cu aceste valori în ecuația (1), rezultă

$$(x^2+y^2+z^2)^5=k^4x^2y^2z^2.$$

Deci locul geometric este o suprafață de ordinul zece.

2° Coordonatele punctului de intersecție al medianelor triunghiului ABC sînt $x=\frac{a}{3}$, $y=\frac{b}{3}$, $z=\frac{c}{3}$. Înlocuind, în relația (1), a,b,c prin $3x$, $3y$, $3z$, se obține ecuația căutată :

$$81(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)=k^4.$$

Deci locul geometric este o suprafață de ordinul patru.

3° Scriind că bisectoarele unghiurilor triunghiului ABC împart laturile opuse în segmente proporționale cu laturile adiacente, se găsesc pentru coordonatele centrului cercului înscris, relațiile

$$\frac{x}{a\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{y}{b\sqrt{a^2+c^2}}=\frac{z}{c\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0. \qquad (2)$$

Obținem succesiv

$$\frac{x^2}{a^2b^2+a^2c^2}=\frac{y^2}{a^2b^2+b^2c^2}=\frac{z^2}{a^2c^2+b^2c^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{2k^4}=$$

$$=\frac{x^2+y^2-z^2}{2a^2b^2}=\frac{x^2-y^2+z^2}{2a^2c^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{2b^2c^2},$$

de unde, punînd

$$h^2=\sqrt{\frac{(x^2+y^2-z^2)(x^2-y^2+z^2)(-x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}},$$

rezultă

$$a^2=\frac{k^2h^2}{-x^2+y^2+z^2},\ b^2=\frac{k^2h^2}{x^2-y^2+z^2},\ c^2=\frac{k^2h^2}{x^2+y^2-z^2},$$

Înlocuind valorile lui a, b, c în ecuația (2), se obține ecuația căutată

$$x\sqrt{-x^2+y^2+z^2}+y\sqrt{x^2-y^2+z^2}+z\sqrt{x^2+y^2-z^2}=$$

$$=k\sqrt{\frac{(x^2+y^2+z^2)(x^2-y^2+z^2)(-x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}}$$

23. *Fiind dat un patrulater strîmb $A_1A_2A_3A_4$, să se demonstreze că planele perpendiculare pe mijloacele laturilor patrulaterului sînt concurente.*

Soluție.

Fie un sistem de coordonate carteziene ortogonale și față de el punctele A_i (x_i, y_i, z_i), $(i=1, 2, 3, 4)$.

Punctul M_1, mijlocul laturii A_1A_2, are coordonatele

$$\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2},$$

iar dreapta A_1A_2 are parametrii directori

$$l=x_1-x_2, \quad m=y_1-y_2, \quad n=z_1-z_2.$$

Planul (P_1), perpendicular pe dreapta A_1A_2, în punctul M, are ecuația

$$(P_1): (x_1-x_2)x+(y_1-y_2)y+(z_1-z_2)z-\frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2-x_2^2-y_2^2-z_2^2}{2}=0.$$

Analog, celelalte trei plane au ecuațiile

$$(P_2): (x_2-x_3)x+(y_2-y_3)y+(z_2-z_3)z-\frac{x_2^2+y_2^2+z_2^2-x_3^2-y_3^2-z_3^2}{2}=0,$$

$$(P_3): (x_3-x_4)x+(y_3-y_4)y+(z_3-z_4)z-\frac{x_3^2+y_3^2+z_3^2-x_4^2-y_4^2-z_4^2}{2}=0,$$

$$(P_4): (x_4-x_1)x+(y_4-y_1)y+(z_4-z_1)z-\frac{x_4^2+y_4^2+z_4^2-x_1^2-y_1^2-z_1^2}{2}=0.$$

Notînd cu P_i $(i=1, 2, 3, 4,)$ membrii întîi ai ecuațiilor planelor (P_i). avem

$$P_1+P_2+P_3+P_4=0$$

deci cele patru plane sînt concurente.

24. *Se consideră un patrulater strîmb $A_1A_2A_3A_4$ și fie M_1 un punct oarecare pe dreapta A_1A_2, M_2 un punct pe A_2A_3, M_3 pe A_3A_4 și M_4 pe A_4A_1.*

Să se demonstreze că condiția ca planele $M_1A_3A_4$, $M_2A_4A_1$, $M_3A_1A_2$, $M_4A_2A_3$ să fie concurente este

$$\frac{\overline{M_1A_1}}{\overline{M_1A_2}} \cdot \frac{\overline{M_2A_2}}{\overline{M_2A_3}} \cdot \frac{\overline{M_3A_3}}{\overline{M_3A_4}} \cdot \frac{\overline{M_4A_4}}{\overline{M_4A_2}} = 1.$$

Soluție.

Cele patru vîrfuri ale patrulaterului sînt A_i (x_i, y_i, z_i, t_i), $(i=1, 2, 3, 4)$.

Punctul M_1 are coordonatele

$$x=x_1+\lambda_1x_2, \quad y=y_1+\lambda_1y_2, \quad z=z_1+\lambda_1z_2, \quad t=t_1+\lambda_1t_2. \tag{1}$$

Ecuația planului $M_1A_3A_4$ este

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \\ x_1+\lambda_1x_2 & y_1+\lambda_1y_2 & z_1+\lambda_1z_2 & t_1+\lambda_1t_2 \end{vmatrix} = 0,$$

sau dacă notăm

$$P_{ijk}=\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x_i & y_i & z_i & t_i \\ x_j & y_j & z_j & t_j \\ x_k & y_k & z_k & t_k \end{vmatrix},$$

ecuația planului $M_1A_3A_4$ este

$$(M_1A_3A_4) : P_{134}+\lambda_1P_{234}=0.$$

Analog, ecuațiile planelor $M_2A_4A_1$, $M_3A_1A_2$, $M_4A_2A_3$ sînt

$$(M_2A_4A_1) : P_{241}+\lambda_2P_{341}=0,$$
$$(M_3A_1A_2) : P_{312}+\lambda_3P_{412}=0,$$
$$(M_4A_2A_3) : P_{423}+\lambda_4P_{123}=0,$$

sau

$$(M_2A_4A_1) : P_{124}+\lambda_2P_{134}=0,$$
$$(M_3A_1A_2) : P_{123}+\lambda_3P_{124}=0,$$
$$(M_4A_2A_3) : P_{234}+\lambda_4P_{123}=0.$$

Trecînd în ecuațiile celor patru plane, în membrul al doilea, termenii care conțin parametrii λ și înmulțind ecuațiile astfel obținute, găsim

$$(1-\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)\, P_{123}\cdot P_{124}\cdot P_{134}\cdot P_{234}=0.$$

Pentru ca planele să fie concurente trebuie ca

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4=1. \tag{2}$$

Din ecuațiile (1) rezultă că

$$\lambda_1=\frac{\overline{A_1M_1}}{\overline{M_1A_2}}.$$

Analog avem

$$\lambda_2=\frac{\overline{A_2M_2}}{\overline{M_2A_3}},\quad \lambda_3=\frac{\overline{A_3M_3}}{\overline{M_3A_4}},\quad \lambda_4=\frac{\overline{A_4M_4}}{\overline{M_4A_1}},$$

deci relația (2) se scrie

$$\frac{\overline{M_1A_1}}{\overline{M_3A_2}}\cdot\frac{\overline{M_2A_2}}{\overline{M_2A_3}}\cdot\frac{\overline{M_3A_3}}{\overline{M_3A_4}}\cdot\frac{\overline{M_4A_4}}{\overline{M_4A_1}}=1.$$

25. Față de un sistem de coordonate carteziene ortogonale $Oxyz$ se consideră dreptele Ox', Oy', Oz', care au cosinusurile directoare

$$Ox': \frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}};$$

$$Oy': \frac{2}{\sqrt{21}},\ \frac{-4}{\sqrt{21}},\ \frac{1}{\sqrt{21}};$$

$$Oz': \frac{3}{\sqrt{14}},\ \frac{1}{\sqrt{14}},\ \frac{-2}{\sqrt{14}}.$$

Să se verifice că dreptele Ox', Oy', Oz' sînt două cîte două perpendiculare.

Să se scrie ecuațiile care transformă sistemul $Oxyz$ în sistemul $Ox'y'z'$ și să se găsească, în coordonatele x', y', z', ecuația planului

$$3x+y-2z-\sqrt{14}=0.$$

Soluție.

Avem formula

$$\cos\ (\widehat{x'Oy'})=\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{2}{\sqrt{21}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{-4}{\sqrt{21}}+\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{21}}=0.$$

Deci,

$$\cos\ (x'Oy')=0,\ \text{adică}\ \widehat{x'Oy'}=\frac{\pi}{2}$$

Analog, rezultă

$$\widehat{y'Oz'}=\frac{\pi}{2},\ \widehat{z'Ox'}=\frac{\pi}{2}.$$

Ecuațiile care transformă sistemul $Oxyz$ în sistemul $Ox'y'z'$ sînt

$$x=\frac{x'}{\sqrt{6}}+\frac{2y'}{\sqrt{21}}+\frac{3z'}{\sqrt{14}},$$

$$y=\frac{x'}{\sqrt{6}}-\frac{4y'}{\sqrt{21}}+\frac{z'}{\sqrt{14}},$$

$$z=\frac{2x'}{\sqrt{6}}+\frac{y}{\sqrt{21}}-\frac{2z'}{\sqrt{14}}.$$

Aplicînd această transformare planului $3x+y-2z-\sqrt{14}=0$, obținem ecuația $z'-1=0$, adică un plan paralel cu planul $x'Oy'$, deci cu dreptele Ox' și Oy'.

26. *Față de un sistem de coordonate carteziene ortogonale se consideră planele de ecuații*

$$(P_1): \ 2x+y-3z+5=0,$$
$$(P_2): \ x+3y-4z+2=0,$$
$$(P_3): \ x-y+z+1=0.$$

Dacă notăm cu θ_1 unghiul ascuțit dintre dreapta de intersecție a planelor (P_2) și (P_3) cu planul (P_1) și cu θ_2, θ_3 celelalte două unghiuri analoge, să se afle valoarea lor.

Soluție.

Dreapta de intersecție a planelor (P_2) și (P_3) are parametrii directori $l_1=1$, $m_1=5$, $n_1=4$

Unghiul θ_1 este dat, deci, de relația

$$\sin\theta=\left|\frac{2\cdot1+1\cdot5-3\cdot4}{\sqrt{4+1+9}\cdot\sqrt{1+25+16}}\right|=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Analog găsim

$$\sin\theta_2=\frac{5}{2\sqrt{247}}, \quad \sin\theta_3=\frac{1}{3}.$$

Capitolul IV

Algebră vectorială

Un segment de dreaptă caracterizat prin lungime, direcție și sens se numește vector.

Doi vectori $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt egali dacă au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime (mărime, modul).

Un vector a cărui mărime este egală cu unitatea se numește versor. Versorii axelor de coordonate se notează cu $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Doi vectori $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt colinari dacă $\vec{u}=\alpha\vec{v}$ (α fiind un scalar), iar trei vectori $\vec{u}, \vec{v}$ și $\vec{w}$ sînt coplanari dacă $\vec{u}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}$.

Dacă $M(x, y, z)$ este un punct din spațiul raportat la un sistem de axe ortogonale $Oxyz$, vectorul $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ se numește vectorul de poziție al punctului M și are expresia

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

Dacă M_i (x_i, y_i, z_i), $(i=1,2)$ sînt două puncte în spațiu, atunci

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}.$$

Fiind dați doi vectori $\vec{u}$ și $\vec{v}$ care fac între ei unghiul $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})=\theta$, atunci expresia

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=uv\cos\theta$$

se numește produsul lor scalar.

În aceleași condiții, vectorul $\vec{w}$, care are direcția perpendiculară pe planul $(\vec{u}, \vec{v})$, sensul astfel încît $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ să formeze un sistem direct și mărimea $uv\sin\theta$, se numește produsul vectorial al vectorilor $\vec{u}, \vec{v}$ și se notează $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$.

Dacă vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ au componentele u_1, u_2, u_3, respectiv v_1, v_2, v_3, atunci avem

$$u=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}.$$

Fiind dați trei vectori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, produsul $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$ se numește produsul mixt al celor trei vectori și se notează $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Valoarea lui este

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})=\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}.$$

Produsul $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$ se numește dublu produs vectorial și are valoarea

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=\vec{v}(\vec{u}\cdot\vec{w})-\vec{u}(\vec{v}\cdot\vec{w}).$$

Ecuația unui plan este

$$\vec{r}\cdot\vec{a}=l,$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție al unei punct curent din spațiu, $\vec{a}$ un vector constant, iar l un scalar.

Ecuația unei drepte în spațiu este

$$\vec{r}\times\vec{a}=\vec{b}.$$

Probleme

1. *Se duce o paralelă $A'B'$ la baza AB a unui triunghi ABC și se descriu cercurile care au ca diametre AB' și BA'. Să se demonstreze că axa radicală a celor două cercuri este înălțimea care trece prin cel de al treilea vîrf.*

Soluție.

Fie M punctul de intersecție al cercurilor de diametre AB' și BA'. Deoarece $\overrightarrow{A'B'}$ este paralel cu $\overrightarrow{AB}$, putem scrie

$$\vec{B'C}=\lambda\vec{BC},\quad \vec{A'C}=\lambda\vec{AC}. \tag{1}$$

Cum M este situat pe semicercurile de diametre AB' și BA', rezultă că $\overrightarrow{B'M} \perp \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{A'M} \perp \overrightarrow{BM}$ și deci

$$\overrightarrow{B'M} \cdot \overrightarrow{AM} = 0, \quad \overrightarrow{A'M} \cdot \overrightarrow{BM} = 0. \tag{2}$$

Avem

$$\overrightarrow{B'M} = \overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{CM}, \quad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}, \tag{3}$$

$$\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CM}, \quad \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}.$$

Ținînd seama de (3), relațiile (2) devin

$$(\overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{CM}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}) = 0,$$

$$(\overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CM}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}) = 0$$

sau

$$\overrightarrow{B'C} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{B'C}) + \overrightarrow{CM}^2 = 0,$$

$$\overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{A'C}) + \overrightarrow{CM}^2 = 0.$$

Avînd în vedere relațiile (1), deducem

$$\lambda(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CM}(\overrightarrow{AC} + \lambda \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CM}^2 = 0,$$

$$\lambda(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CM}(\overrightarrow{AC} + \lambda \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CM}^2 = 0.$$

Scăzînd aceste relații, avem

$$\overrightarrow{CM}[(\lambda - 1)(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC})] = 0,$$

sau

$$\overrightarrow{CM}[(\lambda - 1)\overrightarrow{BA}] = 0.$$

Deoarece $\lambda \neq 1$, rezultă

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{BA} = 0,$$

adică $\overrightarrow{CM}$ este perpendicular pe $\overrightarrow{BA}$.

2. *Dacă a_1, a_2, a_3 sînt proiecțiile vîrfurilor triunghiului $A_1 A_2 A_3$ pe o dreaptă (Δ) din plan, să se arate că perpendicularele duse respectiv din a_1, a_2, a_3 pe $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$* sînt concurente într-un punct ω.

Soluție.

Fie O un punct al dreptei (Δ) și $\vec{u}$ versorul acesteia. Vîrfurile triunghiului sînt fixate de vectorii

$$A_1: \overrightarrow{OA_1}; \quad A_2: \overrightarrow{OA_2}; \quad A_3: \overrightarrow{OA_3},$$

iar proiecțiile a_1, a_2, a_3 de vectorii

$$\overrightarrow{Oa_1}=(u\ pr_{\vec{u}}\overrightarrow{OA_1})\vec{u}-(\overrightarrow{OA_1}\cdot\vec{u})\vec{u},$$

$$\overrightarrow{Oa_2}=(\overrightarrow{OA_2}\cdot\vec{u})\vec{u},$$

$$\overrightarrow{Oa_3}=(\overrightarrow{OA_3}\cdot\vec{u})\vec{u}.$$

Dacă notăm cu

$$\vec{b_1}=\overrightarrow{A_2A_3},\ \vec{b_2}=\overrightarrow{A_3A_1},\ \vec{b_3}=\overrightarrow{A_1A_2}$$

se observă că avem

$$\vec{b_1}+\vec{b_2}+\vec{b_3}=0.$$

Fie a_1a_1', a_2a_2', a_3a_3' perpendicularele coborîte din a_1, a_2, a_3 pe laturile triunghiului. Ecuațiile lor sînt

$$(a_1a_1'):\ \overrightarrow{OA}\cdot\vec{b_1}=c_1;\ (a_2a_2'):\ \overrightarrow{OA}\cdot\vec{b_2}=c_2;\ (a_3a_3'):\ \overrightarrow{OA}\cdot\vec{b_3}=c_3.$$

Deci,

$$c_1+c_2+c_3=0.$$

Dacă ω este punctul de intersecție al primelor două și ω' al ultimelor două să arătăm că $0\omega=0\omega'$, $(\omega=\omega')$, adică dreptele a_1a_1', a_2a_2', a_3a_3' sînt concurente:

$$\omega\begin{cases}\vec{b_1}\ \overrightarrow{OA}=c_1,\\ \vec{b_2}\ \overrightarrow{OA}=c_2.\end{cases}$$

Considerăm sistemul $(\vec{b_1},\ \vec{b_2},\ \vec{b})$ și reciprocul său $(\vec{b_1}^*=\frac{\vec{b_2}\times\vec{b}}{v},\ \vec{b_2}^*=\frac{\vec{b}\times\vec{b_1}}{v}\ \vec{b}^*=\vec{b})$, v fiind volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$, $\vec{b}$, adică $v=\vec{b},\ (\vec{b_1}\times\vec{b_2})$.

Ecuațiile care ne dau vectorii $\overrightarrow{0\omega}$ și $0\omega'$ sînt deci

$$\overrightarrow{O\omega}=c_1\frac{\vec{b_2}\times\vec{b}}{v}+c_2\frac{\vec{b}\times\vec{b_2}}{v},$$

$$\overrightarrow{O\omega'}=c_2\frac{\vec{b_3}\times\vec{b}}{v}+c_3\frac{\vec{b}\times\vec{b_2}}{v}.$$

Ţinînd seama de relaţiile (1) şi (2), rezultă

$$\overrightarrow{O\omega'}=\frac{c_2}{v}[-\vec{b}_1\times\vec{b}-\vec{b}_2\times\vec{b}]-(c_1+c_2)\frac{\vec{b}\times\vec{b}_2}{v}=c_1\frac{\vec{b}_2\times\vec{b}}{v}+c_2\frac{\vec{b}\times\vec{b}_1}{v}=\overrightarrow{O\omega},$$

deci $\omega\equiv\omega'$, adică dreptele a_1a_1', a_2a_2', a_3a_3' sînt concurente.

3. *Intr-un triunghi oarecare ABC, punctele O (centrul cercului circumscris), H (ortocentrul) şi G (centrul de greutate) sînt situate pe dreapta lui Euler, astfel încît $GH=2GO$.*

Soluţie.

Notăm $\overrightarrow{MA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{MB}=\vec{b}$, M fiind mijlocul lui AB. Avem

$$\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CM}.$$

Pe de altă parte,

$$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},$$

deci

$$\overrightarrow{CG}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}.$$

Vectorul $\overrightarrow{CO}$ fiind un vector din planul triunghiului ABC, poate fi scris ca o combinaţie liniară de vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, adică

$$\overrightarrow{CO}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}.$$

Avem

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CA}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}-\vec{a}=(\lambda-1)\vec{a}+\mu\vec{b},$$

$$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CB}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}-\vec{b}=\lambda\vec{a}+(\mu-1)\vec{b}.$$

Pentru a determina scalarii λ şi μ să scriem că O este egal depărtat de vîrfurile triunghiului, adică

$$AO^2=BO^2=CO^2,$$

sau

$$(\lambda-1)^2a^2+\mu^2b^2+2\mu(\lambda-1)\vec{a}\cdot\vec{b}=\lambda^2a^2+(\mu-1)^2b^2+2\lambda(\mu-1)\vec{a}\,\vec{b}=$$
$$=\lambda^2a^2+\mu^2b^2+2\lambda\mu\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

Din acest sistem deducem

$$\lambda=\frac{b^2(a^2-\vec{a}\cdot\vec{b})}{2[a^2b^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2]},\qquad \mu=\frac{a^2(b^2-\vec{a}\cdot\vec{b})}{2[a^2b^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2]}.$$

Deci,

$$\overrightarrow{CO}=\frac{b^2(a^2-\vec{a}\cdot\vec{b})}{2[a^2b^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2]}\vec{a}+\frac{a^2(b^2-\vec{a}\cdot\vec{b})}{2[a^2b^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2]}\vec{b}.$$

Pentru a găsi vectorul $\overrightarrow{CH}$ vom scrie

$$\overrightarrow{CH}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$$

și determinăm scalarii α, β astfel încît $\overrightarrow{AH}$ și $\overrightarrow{BH}$ să fie perpendiculare pe $\vec{b}$, respectiv pe $\vec{a}$. Avem

$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{CA}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}-\vec{a}=(\alpha-1)\vec{a}+\beta\vec{b},$$

$$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{CB}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}-\vec{b}=\alpha\vec{a}+(\beta-1)\vec{b}.$$

Pentru ca vectorii $\overrightarrow{AH}$ și $\vec{b}$ să fie perpendiculari trebuie ca

$$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{b}=0,$$

adică

$$(\alpha-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+\beta b^2=0.$$

Din condiția $\overrightarrow{BH}\perp\vec{a}$ rezultă

$$\alpha a_2+(\beta-1)\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

Din aceste două relații deducem

$$\alpha=\frac{(b^2-\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2b^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2},\quad \beta=\frac{(a^2-\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2b^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2},$$

adică

$$\overrightarrow{CH}=\frac{(b^2-\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2b^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\cdot\vec{a}+\frac{(a^2-\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2b^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\cdot\vec{b}.$$

Vom calcula acum vectorii

$$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{CG},\quad \overrightarrow{GO}=\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CG},$$

Avem

$$\overrightarrow{GH}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2b^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\left\{[b^2-\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}+(a^2-\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}]-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}\right\}$$

sau

$$\overrightarrow{GH}=\frac{1}{3[a^2b^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2]}\left\{[3b^2(\vec{a}\cdot\vec{b})-2(\vec{a}\cdot\vec{b})^2-a^2b^2]\vec{a}+[3a^2(\vec{a}\cdot\vec{b})-2(\vec{a}\cdot\vec{b})^2-a^2b^2]\vec{b}\right\}.$$

Analog găsim

$$\overrightarrow{GO}=\frac{1}{6[a^2b^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2]}\left\{[3b^2(\vec{a}\cdot\vec{b})-2(\vec{a}\cdot\vec{b})^2-a^2b^2]\vec{a}+[3a^2(\vec{a}\cdot\vec{b})-2(\vec{a}\cdot\vec{b})^2-a^2b^2]\vec{b}\right\}.$$

Deci,

$$\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GO}.$$

De aici rezultă că punctele G, H, și O sînt coliniare și că

$$GH=2GO.$$

4. Laturile corespunzătoare a două triunghiuri omologice se întîlnesc în trei puncte coliniare (Teorema lui Desargues).

Soluție.

Fie ABC, $A'B'C'$ cele două triunghiuri și fie O centrul de omologie. Vîrfurile triunghiurilor sînt fixate de următorii vectori:

$$A:\ \overrightarrow{OA};\quad A':\ \overrightarrow{OA}=a\ \overrightarrow{OA};$$
$$B:\ \overrightarrow{OB};\quad B':\ \overrightarrow{OB}=b\ \overrightarrow{OB};$$
$$C:\ \overrightarrow{OC};\quad C':\ \overrightarrow{OC}=c\ \overrightarrow{OC}.$$

Dacă α, β, γ sînt respectiv punctele de intersecție ale laturilor $(BC, B'C')$; $(CA, C'A')$; $(AB, A'B')$, vectorii lor se obțin scriind intersecția dreptelor:

$$\overrightarrow{O\alpha}\begin{cases}(BC):\ \overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OB}+(1-k)\overrightarrow{OC};\\ (B'C'):\ \overrightarrow{OM}=k'b\overrightarrow{OB}+(1-k)c\overrightarrow{OC}.\end{cases}$$

Identificînd aceste două ecuații, obținem

$$k=k'b,\ 1-k=(1-k')c,$$

deci vectorul de poziție al punctului α este

$$\overrightarrow{O\alpha}=\frac{b(1-c)}{b-c}\overrightarrow{OB}+\frac{c(b-1)}{b-c}\overrightarrow{OC}. \qquad (1)$$

Analog se obțin

$$\overrightarrow{O\beta}=\frac{c(1-a}{c-a}\overrightarrow{OC}+\frac{a(c-1)}{c-a}\overrightarrow{OA}, \tag{2}$$

$$\overrightarrow{O\gamma}=\frac{a(1-b)}{a-b}\overrightarrow{OA}+\frac{b(a-1)}{a-b}\overrightarrow{OB}. \tag{3}$$

Vectorii $\overrightarrow{O\alpha}$, $\overrightarrow{O\beta}$, $\overrightarrow{O\gamma}$ au extremitățile coliniare dacă există trei scalari X, Y, Z, $(X+Y+Z=0)$ astfel încît

$$X\overrightarrow{O\alpha}+Y\overrightarrow{O\beta}+Z\overrightarrow{O\gamma}=0.$$

Expresia (4) scrisă dezvoltat devine

$$X\frac{b(1-c)}{b-c}\overrightarrow{OB}+X\frac{c(b-1)}{b-c}\overrightarrow{OC}+Y\frac{a(c-1)}{c-a}\overrightarrow{OA}+Y\frac{c(1-a)}{c-a}\overrightarrow{OC}+ \tag{4}$$
$$+Z\frac{a(1-b)}{a-b}\overrightarrow{OA}+Z\frac{b(a-1)}{a-b}\overrightarrow{OB}=0.$$

Ca acest vector să fie nul trebuie ca fiecare componentă a lui să fie nulă. Deci

$$\begin{cases} \frac{a(c-1)}{c-a}Y+\frac{a(1-b)}{a-b}Z=0, \\ \frac{b(1-c}{b-c}X+\frac{b(a-1)}{a-b}Z=0, \\ \frac{c(b-1)}{b-c}X+\frac{c(1-a)}{c-a}Y=0, \end{cases}$$

sistem care rezolvat în raport cu X, Y, Z conduce la următoarele rădăcini:

$$\begin{cases} X=k\frac{(c-1)(a-1)}{(c-a)(a-b)}, \\ Y=k\frac{(1-c)(1-b)}{(b-c)(a-b)}, \\ Z=k\frac{(1-c)^2}{(b-c)(c-a)}, \end{cases}$$

k fiind o constantă oarecare. Se verifică imediat că

$$X+Y+Z=0.$$

Rezultă că punctele α, β, γ sînt coliniare.

5. *Se dă o dreaptă fixă (d) și un punct exterior A. Se unește un punct variabil M de pe dreapta (d) cu A.*

Să se găsească locul geometric al punctului P care împarte segmentul AM în raportul $\frac{\overline{MP}}{\overline{AP}}=k$.

Soluție.

Dacă se consideră originea O a planului în punctul A, ecuația dreptei (d) este

$$\overrightarrow{OM}\cdot\vec{n}=\vec{n}^2,$$

$\vec{n}$ fiind vectorul cu originea în O perpendicular pe (d). Punctul curent P al locului geometric satisface condiția

$$\overrightarrow{MP}=k\overrightarrow{PO},$$

sau

$$\overrightarrow{OM}=(k+1)\overrightarrow{OP}.$$

Înlocuind pe $\overrightarrow{OM}$ în ecuația dreptei (d), rezultă

$$(k+1)\overrightarrow{OP}\cdot\vec{n}=\vec{n}^2$$

sau

$$\overrightarrow{OP}\cdot\vec{n}=\frac{\vec{n}^2}{k+1}.$$

Locul geometric este deci o dreaptă paralelă cu (d).

6. *Să se arate că mijloacele diagonalelor unui patrulater complet sînt coliniare (Teorema lui Pappus).*

Soluție.

Fie $A\equiv O$ originea axelor de coordonate. Fiind dați vectori

$$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{AD}=\vec{b},\ \overrightarrow{AE}=p\vec{a},\ \overrightarrow{AF}=q\vec{b},$$

Patrulaterul $ABCDEF$ este perfect determinat.

Într-adevăr, punctul C se află la intersecția dreptelor DE și BF.

Ecuațiile vectoriale ale acestor drepte sînt

$$(DE):\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OD}+(1-\lambda)\overrightarrow{OE},$$
$$(BF):\overrightarrow{OM}=\mu\overrightarrow{OF}+(1-\mu)\overrightarrow{OB},$$

sau

$$(DE):\overrightarrow{OM}=\lambda\vec{b}+(1-\lambda)p\vec{a},$$
$$(BF):\overrightarrow{OM}=\mu p\vec{b}+(1-\mu)\vec{a}.$$

Punctului C de intersecție îi corespund valorile

$$\lambda=\mu p;\ (1-\lambda)p=1-\mu,$$

adică

$$\lambda=\frac{(p-1)q}{pq-1} \text{ sau } \mu=\frac{p-1}{pq-1}.$$

Deci,

$$\overrightarrow{OC}=\frac{p(q-1)}{pq-1}\vec{a}+\frac{q(p-1)}{pq-1}\vec{b}.$$

Mijloacele diagonalelor AC, DB, EF fiind respectiv N,P,Q, avem

$$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\frac{p(q-1)}{2(pq-1)}\vec{a}+\frac{q(p-1)}{2(pq-1)}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),$$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})=\frac{1}{2}(p\vec{a}+q\vec{b}).$$

Vrem să arătăm că P,Q,N sînt coliniare, deci că vectorii $\overrightarrow{PN}$ și $\overrightarrow{PQ}$ au aceeași direcție

$$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\left(\frac{pq-p-pq+1}{pq-1}\vec{a}+\frac{qp-q-pq+1}{pq-1}\vec{b}\right)$$

sau

$$\overrightarrow{PN}=-\frac{1}{2(pq-1)}\left((p-1)\vec{a}+(q-1)\vec{b}\right).$$

Analog,

$$\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}\left((p-1)\vec{a}+(q-1)\vec{b}\right).$$

Deci $\overrightarrow{PQ}=(1-pq)\overrightarrow{PN}$ și punctele N,P,Q sînt coliniare.

7. *Să se demonstreze că locul geometric al unui punct P ale cărui distanțe la două puncte fixe sînt într-un raport constant, este un cerc (cercul lui Apollonius).*

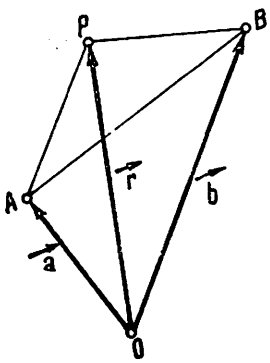


Figura 5

Soluție.

Fie A și B cele două puncte fixe (fig. 5). Notăm cu a și b vectorii de poziție ai punctelor A și B, adică $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ și $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ și cu $\vec{r}$ vectorul de poziție al lui P, adică $\vec{r}=\overrightarrow{OP}$

Avem

$$\vec{r}=\vec{a}+\overrightarrow{AP}=\vec{b}+\overrightarrow{BP}.$$

Din această relație deducem

$$\overrightarrow{AP}=\vec{r}-\vec{a}, \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{BP}=\vec{r}-\vec{b}. \tag{2}$$

Dar

$$\frac{AP}{BP}=\lambda$$

sau

$$\frac{AP^2}{BP^2}=\lambda^2$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă

$$\frac{(\vec{\gamma}-\vec{a})^2}{(\vec{\gamma}-\vec{b})^2}=\lambda^2$$

sau

$$\gamma(1-\lambda^2)-2\vec{\gamma}(\vec{a}-\lambda^2\vec{b})=\lambda^2b^2-a^2. \tag{3}$$

Avînd în vedere că originea este arbitrară, o vom alege astfel încît să avem

$$\vec{a}=\lambda^2\vec{b}. \tag{4}$$

Înlocuind această valoare în (3), rezultă

$$\gamma^2=OP^2=\frac{\gamma^2b^2-a^2}{1-\lambda^2}. \tag{5}$$

Ridicînd la patrat relația (4), deducem

$$a^2=\lambda^4b^2,$$

deci relația (5) se scrie

$$OP^2=\lambda^2b^2.$$

Înmulțind scalar cu vectorul $\vec{b}$ relația (4), deducem

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lambda^2b^4,$$

deci

$$OP^2=\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

Rezultă că OP^2 este constant, deci P descrie un cerc de rază $\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{b}}$.

8. *Se unește un punct M al axei radicale a două cercuri O și O' cu centrele cercurilor și se ridică perpendiculare în O pe OM și în O' pe $O'M$. Să se găsească locul geometric al punctului de intersecție al acestor două drepte, cînd M descrie axa radicală.*

Soluție.

Fie O orginea axelor de coordonate și fie R și R' razele celor două cercuri. Ecuațiile lor sînt

$$O)\ \vec{OM}^2=R^2,$$

$$O')\ \vec{OM}^2-2\ \vec{OM}\cdot\vec{OO'}+\vec{OO'}^2-R'^2=0.$$

Ecuația axei radicale este

$$\vec{OO'}\cdot\vec{OM}=\frac{\vec{OO'}^2-R'^2+R^2}{2}. \tag{1}$$

Fie P punctul curent pe locul geometric. Punctul P se află la intersecția dreptelor OP și $O'P$, care au ecuațiile vectoriale

$$(OP):\vec{OM}\cdot\vec{OP}=0, \tag{2}$$

$$(O'P):\vec{O'P}\cdot\vec{O'M}=0.$$

Ultima ecuație se mai scrie

$$(\vec{OP}-\vec{OO'})\cdot(\vec{OM}-\vec{OO'})=0,$$

sau

$$(O'P):\vec{OM}\cdot\vec{OP}-\vec{OO'}\cdot\vec{OP}-\vec{OM}\cdot\vec{OO'}+\vec{OO'}^2=0. \tag{3}$$

Ecuația locului geometric se găsește eliminînd pe OM între (1) (2) și (3).

Ținînd seama de relația (1) și de ecuația dreptei OP, ecuația dreptei $O'P$ devine

$$\vec{OO'}\cdot\vec{OP}=\frac{\vec{OO'}+R^2-R'^2}{2}.$$

Ea reprezintă locul geometric căutat, care este o dreaptă perpendiculară pe OO'.

9. *Se consideră vectorii A_1, A_2, A_3 formînd un triunghi $P_1P_2P_3$ și vectorii*

$$\vec{B}_1=\alpha_1\vec{A}_2+(\alpha_1-1)\vec{A}_3,$$

$$\vec{B}_2=\alpha_2\vec{A}_3+(\alpha_2-1)\vec{A}_1,$$

$$\vec{B}_3=\alpha_3\vec{A}_1+(\alpha_3-1)\vec{A}_2,$$

trecînd prin punctele P_1, P_2, P_3.

Să se arate că pentru ca dreptele pe care se află vectorii $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$ *să fie concurente este necesar și suficient ca*

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3=(1-\alpha_1)\ (1-\alpha_2)\ (1-\alpha_3).$$

N. Teodorescu

Soluție.

Pentru ca cele trei drepte să fie concurente trebuie să existe două numere λ și μ, nu amîndouă nule, astfel încît

$$\vec{B}_1=\lambda\vec{B}_2+\mu\vec{B}_3.$$

Înlocuind aici valorile vectorilor $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$, obținem relația

$$\alpha_1\vec{A}_2+(\alpha_1-1)\vec{A}_3=\lambda\ [\alpha_2\vec{A}_3+(\alpha_2-1)\vec{A}_1]+\mu\ [\alpha_3\vec{A}_1+(\alpha_3-1)\vec{A}_2\ ,$$

sau

$$[\lambda\ (\alpha_2-1)+\mu\ \alpha_3]\vec{A}_1+[\mu\ (\alpha_3-1)-\ \alpha_1]\vec{A}_2+(\lambda\ \alpha_2-\ \alpha_1+1)\vec{A}_3=0 \qquad (1)$$

Avînd în vedere că vectorii $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ formează un triunghi, rezultă că egalitatea (1) are loc dacă și numai dacă

$$\lambda(\alpha_2-1)+\mu\alpha_3=0,\ \mu\ (\alpha_3-1)-\alpha_1=0,\ \lambda\ \alpha_2-\alpha_1+1=0.$$

Din ultimele două ecuații deducem

$$\lambda=\frac{\alpha_1-1}{\alpha_2},\ \mu=\frac{\alpha_1}{\alpha_3-1},$$

care înlocuite în prima ecuație ne dau

$$\frac{(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)}{\alpha_2}+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3-1}=0,$$

sau

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3=(1-\alpha_1)\ (1-\alpha_2)\ (1-\alpha_3).$$

10. *Fiind dați trei vectori* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, *și notînd*

$$\vec{b}_1=\frac{\vec{a}_2\times\vec{a}_3}{V},\ \vec{b}_2=\frac{\vec{a}_3\times\vec{a}_1}{V},\ \vec{b}_3=\frac{\vec{a}_1\times\vec{a}_2}{V},$$

unde $V=\vec{a}_1\cdot(\vec{a}_2\times\vec{a}_3)$, *să se arate că*

1° $a_i\cdot b_j=\delta_i^j$ *(simbolul lui Kronecker);*

2° $\vec{b}_1\cdot(\vec{b}_2\times\vec{b}_3)=\frac{1}{V}$;

Soluție.

1° Notînd cu (i, j, k) una din tripletele (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2). avem

$$\vec{a}_i\cdot\vec{b}_i=\vec{a}_i\cdot\frac{\vec{a}_j\times\vec{a}_k}{V}=1. \qquad (1)$$

De asemenea,

$$\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = \vec{a}_i \cdot \frac{\vec{a}_k \times \vec{a}_l}{V} = \frac{\vec{a}_i \cdot (\vec{a}_k \times \vec{a}_l)}{V}.$$

Dar avînd în vedere că în cadrul unui produs mixt putem face o permutare circulară și că, schimbînd doi vectori, produsul schimbă sensul. avem

$$\vec{a}_l \cdot (\vec{a}_k \times \vec{a}_l) = -\vec{a}_k \cdot (\vec{a}_l \times \vec{a}_l) = 0,$$

deci

$$a_i \cdot b_j = 0, \quad (i \neq j) \tag{2}$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă

$$a_i \cdot b_j = \delta_i^j.$$

2° Avem

$$\vec{b}_1 \cdot (\vec{b}_2 \times \vec{b}_3) = \vec{b}_1 \cdot \left(\vec{b}_2 \times \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{V} \right) = \frac{\vec{b}_1}{V} \cdot [\vec{b}_2 \times (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)]. \tag{3}$$

Avînd în vedere formula de calcul a dublului produs vectorial, rezultă

$$\vec{b}_2 \times (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \vec{a}_1 (\vec{b}_2 \cdot \vec{a}^2) - \vec{a}_2 (\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_1);$$

sau, avînd în vedere formulele (1) și (2),

$$\vec{b}_2 \times (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \vec{a}_1.$$

Înlocuind această relație în (3), găsim

$$\vec{b}_1 \cdot (\vec{b}_2 \times \vec{b}_3) = \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_1}{V} = \frac{1}{V}.$$

11. *Să se găsească locul geometric al mijlocului unei drepte de lungime constantă ale cărei extremități se sprijină pe două drepte perpendiculare care nu se intersectează.*

Soluție.

Fie A și B picioarele perpendicularei comune a celor două drepte și C mijlocul lui AB. Să notăm $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, deci $\overrightarrow{CB} = -\vec{a}$. Ecuația vectorială a primei drepte este

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}_1 = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA} + \lambda \vec{b} = \overrightarrow{OC} + \vec{a} + \lambda \vec{b},$$

unde $\vec{b}$ este un vector paralel cu prima dreaptă.

Ecuația celei de a doua drepte este

$$\overrightarrow{OQ}=\vec{r}_2=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}+\lambda\vec{c}=\overrightarrow{OC}-\vec{a}+\mu\vec{c},$$

unde $\vec{c}$ este un vector paralel cu cea de a doua dreaptă.

Să punem acum condiția ca $\overrightarrow{PQ}$ să aibă lungimea constantă. Avem

$$\overrightarrow{QP}=\vec{r}_1-\vec{r}_2=2\vec{a}+\lambda\vec{b}-\mu\vec{c},$$

de unde

$$\overrightarrow{PQ}^2=4a^2+\lambda^2b^2+\mu^2c^2+4\lambda\vec{a}\vec{b}-4\mu\vec{a}\vec{c}+2\lambda\mu\vec{b}\vec{c},$$

adică

$$4a^2+\lambda^2b^2+\mu^2c^2=l^2, \tag{1}$$

deoarece vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sînt perpendiculari doi cîte doi și deci

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0.$$

Să scriem vectorul de poziție al centrului R al lui $\overrightarrow{PQ}$

$$\overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}}{2}=\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2}$$

sau

$$\overrightarrow{OR}=2\vec{r}_0+\frac{\lambda\vec{b}\times\mu\vec{c}}{2},\quad(\vec{r}_0=\overrightarrow{OC}).$$

Dacă alegem originea O în punctul C, avem $\vec{r}_0=0$ și deci

$$\overrightarrow{CR}=\overrightarrow{OR}=\frac{\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}}{2}.$$

Aceasta arată că locul geometric al punctului R este situat într-un plan care trece prin C (pentru $\lambda=\mu=0$ se obține $\overrightarrow{CR}=0$) și este paralel cu cele două drepte date, deci perpendicular pe perpendiculara comună.

Ridicînd la pătrat vectorul $\overrightarrow{CR}$ și ținînd seama de faptul că $\vec{b}\perp\vec{c}$, găsim

$$\overrightarrow{CR}^2=\frac{1}{4}(\lambda^2b^2+\mu^2c^2).$$

Ținînd seama aici de relația (1), deducem

$$CR^2=\frac{b^2}{4}-a^2,$$

deci $\overrightarrow{CR}=\text{const}$, ceea ce ne arată că locul geometric al lui R este situat pe o sferă cu centrul în C și cu raza $\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4a^2}$.

Rezultă că locul geometric căutat este un cerc cu centrul în mijlocul perpendicularei comune și cuprins într-un plan paralel cu cele două drepte date.

12. *Să se găsească punctul de intersecție al planului de ecuație*

$$\vec{r}\cdot\vec{a}=m \tag{1}$$

cu dreapta de ecuație

$$\vec{r}\times\vec{b}=\vec{B},\quad (\vec{B}\cdot\vec{b}=0), \tag{2}$$

care nu este paralelă cu planul.

Soluție.

A găsi punctul de intersecție al planului cu dreapta revine la scoate valoarea vectorului $\vec{r}$ din sistemul (1), (2).

Deoarece planul (1) este perpendicular pe vectorul $\vec{a}$, iar dreapta (2) este paralelă cu vectorul $\vec{b}$, condiția de paralelism a planului cu dreapta va fi $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, deci, în cazul nostru, $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq 0$.

Să considerăm acum dublul produs vectorial

$$\vec{a}\times(\vec{r}\times\vec{b})=\vec{a}\times\vec{B}.$$

Dezvoltînd membrul întîi al acestei egalități, obținem

$$\vec{r}(\vec{a}\cdot\vec{b})-\vec{b}(\vec{r}\cdot\vec{a})=\vec{a}\times\vec{B}.$$

sau, ținînd seama de ecuația (1),

$$\vec{r}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})=\overrightarrow{mb}+\vec{a}\times\vec{B}.$$

Avînd în vedere că $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq 0$, rezultă

$$\gamma=\frac{\overrightarrow{mb}+\vec{a}\times\vec{B}}{\vec{a}\cdot\vec{b}}.$$

Acesta este vectorul de poziție al punctului de intersecție al dreptei (1) cu planul (2).

13. *Să se găsească distanța minimă dintre două drepte neparalele, de ecuații vectoriale*

$$\begin{aligned}&\vec{\gamma}\times\vec{a}=\vec{A},\ (\vec{A}\cdot\vec{a}=0).\\&\vec{\gamma}\times\vec{b}=\vec{B},\ (\vec{B}\cdot\vec{b}=0).\end{aligned} \tag{1}$$

N. E. Kocin

Soluție.

Să luăm pe prima dreaptă un punct M_1 de rază vectoare γ_1 și pe cealaltă dreaptă un alt punct M_2 de rază vectoare γ_2. În acest caz avem

$$\vec{\gamma}_1 \times \vec{a} = \vec{A}, \quad \vec{\gamma}_2 \times \vec{b} = \vec{B}$$

Să înmulțim scalar prima ecuație cu $\vec{b}$ și a doua cu $\vec{a}$:

$$(\vec{\gamma}_1 \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{A} \cdot \vec{b},$$

sau

$$\vec{\gamma}_1 \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad \vec{A} \cdot \vec{b},$$

$$(\vec{\gamma}_2 \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{B} \cdot \vec{a},$$

sau

$$\vec{\gamma}_2 \, (\vec{b} \times \vec{a}) = \vec{B} \cdot \vec{a}.$$

Să adunăm aceste ecuații

$$(\vec{\gamma}_1 - \vec{\gamma}_2) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{A} \cdot \vec{b} + \vec{B} \cdot \vec{a}.$$

Să notăm pentru moment $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$. Avem

$$(\vec{\gamma}_1 - \vec{\gamma}_2) \cdot \vec{c} = \vec{A} \cdot \vec{b} + \vec{B} \cdot \vec{a},$$

adică

$$M_1 M_2 \cos (\vec{M_2 M_1}, \vec{c}) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{b} + \vec{B} \cdot \vec{a}}{c}.$$

Deci, proiecția lui $\overrightarrow{M_2 M_1}$ pe direcția vectorului $\vec{c}$ este constantă. Rezultă că $M_1 M_2$ va avea lungimea minimă atunci cînd $\overrightarrow{M_1 M_2}$ va coincide în direcție cu $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, deci cînd va fi perpendiculara comună a celor două drepte.

Mărimea acestei distanțe minime este

$$d = \frac{|\vec{A} \cdot \vec{b} + \vec{B} \cdot \vec{a}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}.$$

De aici se obține condiția ca cele două drepte (1) să se intersecteze

$$\vec{A} \cdot \vec{b} + \vec{B} \cdot \vec{a} = 0,$$

deoarece în acest caz distanța minimă trebuie să fie egală cu zero.

14. *Se iau pe muchiile unui triedru segmentele* $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ $\overline{OC}$ *astfel încît să avem*

$$\frac{1}{\overline{OA}}+\frac{1}{\overline{OB}}+\frac{1}{\overline{OC}}=\frac{1}{l}.$$

Să se demonstreze că planul ABC trece printr-un punct fix.

Soluție.

Fie $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Ecuația vectorială a planului care trece prin extremitățile celor trei vectori este

$$\vec{r}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}, \tag{1}$$

unde λ, μ, ν sînt trei parametri legați prin relația

$$\lambda+\mu+\nu=1. \tag{2}$$

Impărțind ecuația (2) cu l, obținem

$$\frac{\lambda}{l}+\frac{\mu}{l}+\frac{\nu}{l}=\frac{1}{l}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}. \tag{3}$$

Din (3) rezultă

$$\left(\frac{\lambda}{l}-\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{\mu}{l}-\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{\nu}{l}-\frac{1}{c}\right)=0,$$

care are soluția particulară

$$\lambda=\frac{l}{a},\ \mu=\frac{l}{b},\ \nu=\frac{b}{c}.$$

Introducînd aceste valori ale lui λ, μ, ν în relația (1), deducem

$$\vec{r}_l=\frac{l\vec{a}}{a}+\frac{l\vec{b}}{b}+\frac{l\vec{c}}{c}=l\,(\vec{u}_a+\vec{u}_b+\vec{u}_c),$$

unde am notat cu $\vec{u}_a$, $\vec{u}_b$, $\vec{u}_c$, versorii direcțiilor lui $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, care sînt evident constanți. Deci, toate planele considerate au un punct comun și anume extremitățile vectorului

$$\vec{r}_1=l\,(\vec{u}_a+\vec{u}_b+\vec{u}_c).$$

15. *Fie OABC și* $OA_1B_1C_1$ *două triedre avînd același vîrf O. Dacă planele* (P_A), (P_B), (P_C), *duse respectiv prin muchiile OA, OB, OC, perpendicular pe fețele* OB_1C_1, OC_1A_1, OA_1B_1, *sînt concurente, atunci și planele* (P_{A_1}), (P_{B_1}), (P_{C_1}) *duse prin muchiile* OA_1, OB_1, OC_1, *perpendicular pe fețele OBC, OCA, OCA, OAB, sînt de asemenea concurente.*

N. Teodorescu

Soluție.

Să notăm cu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1$ versorii muchiilor celor două triedre. Planul (P_A) este perpendicular pe vectorul

$$\vec{S}_A = \vec{a} \times (\vec{b}_1 \times \vec{c}_1).$$

Pentru ca planele (P_A), (P_B), (P_C) să fie concurente trebuie ca vectorii $\vec{S}_A$, $\vec{S}_B$, $\vec{S}_C$ să fie coplanari, adică $(S_A, S_B, S_C) = 0$.

Avem

$$\vec{S}_A = \vec{b}_1 (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}_1 (\vec{a} \cdot \vec{b}_1),$$

$$\vec{S}_B = \vec{c}_1 (\vec{b} \cdot \vec{a}_1) - \vec{a}_1 (\vec{b} \cdot \vec{c}_1),$$

$$\vec{S}_C = \vec{a}_1 (\vec{c} \cdot \vec{b}_1) - \vec{b}_1 (\vec{c} \cdot \vec{a}_1).$$

Deci,

$$\vec{S}_A \times \vec{S}_B = (\vec{b}_1 \times \vec{c}_1)(\vec{a} \cdot \vec{c}_1)(\vec{b} \cdot \vec{a}_1) + (\vec{a}_1 \times \vec{b}_1)(\vec{a} \cdot \vec{c}_1)(\vec{b} \cdot \vec{c}_1) + (\vec{c}_1 \times \vec{a}_1)(\vec{a} \cdot \vec{b}_1)(\vec{b} \cdot \vec{c}_1).$$

Ținînd seama că

$$(\vec{b}_1 \times \vec{c}_1) \cdot \vec{b}_1 = 0, \quad (\vec{a}_1 \times \vec{b}_1) \cdot \vec{a}_1 = 0, \quad (\vec{a}_1 \times \vec{b}_1) \cdot \vec{b}_1 = 0, \quad (\vec{c}_1 \times \vec{a}_1) \cdot \vec{a}_1 = 0,$$

$$(\vec{b} \times \vec{c}_1) \cdot \vec{a}_1 = (\vec{c}_1 \times \vec{a}_1) \cdot \vec{b}_1 = (\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1),$$

rezultă că

$$(\vec{S}_A, \vec{S}_B, \vec{S}_C) = (\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1)[(\vec{ac}_1)(\vec{ba}_1)(\vec{cb}_1) - (\vec{ab}_1)(\vec{bc}_1)(\vec{ca}_1)].$$

Analog avem

$$(\vec{S}_{A_1}, \vec{S}_{B_1}, \vec{S}_{C_1}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})[(\vec{a}_1\vec{c})(\vec{b}_1\vec{a})(\vec{c}_1\vec{b}) - (\vec{a}_1\vec{b})(\vec{b}_1\vec{c})(\vec{c}_1\vec{a})],$$

deci

$$\frac{(\vec{S}_A, \vec{S}_B, \vec{S}_C)}{(\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1)} + \frac{(\vec{S}_{A_1}, \vec{S}_{B_1}, \vec{S}_{C_1})}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})} = 0.$$

De aici rezultă că dacă planele (P_A), (P_B), (P_C) sînt concurente, adică dacă $(\vec{S}_A, \vec{S}_B, \vec{S}_C) = 0$, avem $(\vec{S}_{A_1}, \vec{S}_{B_1}, \vec{S}_{C_1}) = 0$, deci planele (P_{A_1}), (P_{B_1}), (P_{C_1}) sînt concurente.

16. *Fie trei vectori* $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ *formînd un triedru nedegenerat. Să se arate că, condiția necesară și suficientă pentru ca vectorii*

$$\begin{aligned}\vec{u}_1&=\alpha_1\vec{p}+\beta_1\vec{q}+\gamma_1\vec{r},\\ \vec{u}_2&=\alpha_2\vec{p}+\beta_2\vec{q}+\gamma_2\vec{r},\\ \vec{u}_3&=\alpha_3\vec{p}+\beta_3\vec{q}+\gamma_3\vec{r}\end{aligned}$$

să fie coplanari este

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}=0.$$

N. Teodorescu

Soluție.

Pentru ca vectorii $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ să fie coplanari este necesar și suficient ca să existe trei numere λ, μ, ν, nu toate nule, astfel încît

$$\lambda\vec{u}_1+\mu\vec{u}_2+\nu\vec{u}_3=0.$$

Inlocuind în această relație valorile vectorilor $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, obținem

$$\lambda(\alpha_1\vec{p}+\beta_1\vec{q}+\gamma_2\vec{r})+\mu(\alpha_2\vec{p}+\beta_2\vec{q}+\gamma_2\vec{r})+\nu(\alpha_3\vec{p}+\beta_3\vec{q}+\gamma_3\vec{r})=0,$$

sau

$$(\lambda\alpha_1+\mu\alpha_2+\nu\alpha_3)\vec{p}+(\lambda\beta_1+\mu\beta_2+\nu\beta_3)\vec{q}+(\lambda\gamma_1+\mu\gamma_2+\nu\gamma_3)\vec{r}=0. \qquad (1)$$

Avînd în vedere că vectorii $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ formează un triedru nedegenerat, relația (1) are loc dacă și numai dacă

$$\begin{cases}\lambda\alpha_1+\mu\alpha_2+\nu\alpha_3=0,\\ \lambda\beta_1+\mu\beta_2+\nu\beta_3=0,\\ \lambda\gamma_1+\mu\gamma_2+\nu\gamma_3=0,\end{cases}$$

Considerînd aceste ecuații ca un sistem în necunoscutele λ, μ, ν, pentru ca acest sistem să admită soluții diferite de cea banală este necesar și suficient ca

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}=0.$$

17. *Să se demonstreze că distanța dintre două drepte neparalele poate fi exprimată prin formula*

$$d=\frac{|(\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)|}{|\vec{r}_1\times\vec{r}_2|},$$

unde $\vec{r}_1$ *şi* $\vec{r}_2$ *sînt doi vectori arbitrari dirijaţi de-a lungul acestor drepte. iar* r_3 *este un vector care uneşte un punct de pe o dreaptă cu un punct de pe cealaltă dreaptă.*

N. M. Giunter şi R. O. Kuzmin

Soluţie.

Se ştie că

$$V=|(\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)|=|\vec{r}_1\cdot(\vec{r}_2\times\vec{r}_3)|$$

reprezintă volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ ca muchii.

De asemenea,

$$A=|\vec{r}_1\times\vec{r}_2|$$

este aria paralelogramului construit pe vectorii $\vec{r}_1$ şi $\vec{r}_2$.

Putem deci scrie

$$V=A\cdot d,$$

adică

$$d=\frac{V}{A},$$

sau

$$d=\frac{|(\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)|}{|\vec{r}_1\times\vec{r}_2|}.$$

18. *Fiind dat un patrulater strîmb ABCD, trei numere constante a, b, c şi un parametru variabil* λ, *se construiesc punctele M, N, P, Q pe AB, BC, DA astfel încît*

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BA}}=a+\lambda,\ \frac{\overline{BN}}{\overline{BC}}=b+\lambda,\ \frac{\overline{DQ}}{\overline{DA}}=b+\lambda,\ \frac{\overline{DP}}{\overline{DC}}=c-\lambda.$$

Să se arate că suma $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NQ}$ *rămîne constantă cînd* λ *variază.*

Soluţie.

Avem egalităţile

$$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP},\ \overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AQ}.$$

Dar

$$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}(a+\lambda),$$
$$\overrightarrow{NB}=(\lambda-b)\overrightarrow{BC},$$
$$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{CD}(1-c+\lambda),$$
$$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{AD}(1-b-\lambda),$$

de unde

$$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{AB}(a+\lambda-1)+\overrightarrow{BC}(1+\lambda-b)+\overrightarrow{CD}(1-c+\lambda)+\overrightarrow{DA}(b-1+\lambda).$$

Coeficientul lui λ este

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=0.$$

Deci, suma geometrică este constantă.

19. *Să se arate că suma pătratelor laturilor unui patrulater (plan sau strîmb) este egal cu suma pătratelor diagonalelor plus de patru ori pătratul distanței dintre mijloacele diagonalelor.*

Să se găsească corespondentul acestei teoreme pentru cazul unui tetraedru.

Soluție.

Fie M și N mijloacele diagonalelor AC, respectiv BD. Din conturul poligonal $ABNMA$ rezultă

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}.$$

Dar $\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AC}}{2}$ și $\overrightarrow{NB}=-\overrightarrow{BN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Deci

$$\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{AC}}{2}-\frac{\overrightarrow{BD}}{2}+\overrightarrow{MN}. \tag{1}$$

La fel din $BNMCB$ deducem

$$\overrightarrow{BC}=\frac{\overrightarrow{AC}}{2}+\frac{\overrightarrow{BD}}{2}-\overrightarrow{MN}, \tag{2}$$

din $CMNDC$,

$$\overrightarrow{CD}=-\frac{\overrightarrow{AC}}{2}+\frac{\overrightarrow{BD}}{2}+\overrightarrow{MN}, \tag{3}$$

iar din *DNMAD*,

$$\overrightarrow{DA}=-\frac{\overrightarrow{AC}}{2}-\frac{\overrightarrow{BD}}{2}-\overrightarrow{MN}. \tag{4}$$

Ridicînd la pătrat relaţiile (1), (2), (3), (4), obţinem

$$AB^2=\frac{1}{4}AC^2+MN^2+\frac{1}{4}BD^2+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MN}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BD},$$

$$BC^2=\frac{1}{4}AC^2+MN^2+\frac{1}{4}BD^2-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BD},$$

$$CD^2=\frac{1}{4}AC^2+MN^2+\frac{1}{4}BD^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BD},$$

$$DA^2=\frac{1}{4}AC^2+MN^2+\frac{1}{4}BD^2+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BD}.$$

Adunînd aceste relaţii obţinem

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD_2+4\ MN^2. \tag{5}$$

In cadrul demonstraţiilor nu a apărut în nici un fel ipoteza ca punctele *A, B, C, D* să fie coplanare. Deci, rezultatul rămîne valabil şi pentru un patrulater strîmb.

Aceeaşi observaţie permite extinderea teoremei la un tetraedru. In acest caz, *AC* şi *BD* formează două muchii opuse, iar *M* şi *N* sînt mijloacele lor.

Relaţia (5) ne arată că într-un tetraedru suma pătratelor muchiilor din două din cele trei perechi de muchii opuse este egală cu suma pătratelor celorlalte două muchii opuse, adunată cu de patru ori distanţa dintre mijloacele muchiilor din ultima pereche de muchii opuse.

20. *Pe muchiile SA, SB, SC ale unui tetraedru SABC se iau trei puncte arbitrare A', B', C'. Să se arate că punctul M, de intersecţie al planelor A'BC, AB'C, ABC', punctul N, intersecţia planelor AB'C', A'BC' A'B'C, şi punctul S sînt coliniare.*

N. Teodorescu

Soluţie.

O soluţie a fost dată în capitolul III, pr. 5.

Notăm $\overrightarrow{SA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{v}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{w}$. Avînd în vedere că *A'*, *B'*, şi *C'*, sînt pe muchiile *SA, SB, SC*, rezultă că

$$\overrightarrow{SA'}=\alpha\vec{u},\ \overrightarrow{SB'}=\beta\vec{v},\ SC'=\gamma\vec{w}.$$

Un punct P_1 din planul *A'BC* va fi determinat de ecuaţia vectorială

$$\overrightarrow{SP_1}=\overrightarrow{SA'}+\lambda_1\overrightarrow{A'B}+\mu_1\overrightarrow{A'C}. \tag{1}$$

Dar

$$\overrightarrow{A'B}=\overrightarrow{A'S}+\overrightarrow{SB}=\vec{v}-\alpha\vec{u},\quad \overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{A'S}+\overrightarrow{SC}=\vec{w}=\alpha\vec{u},$$

deci relația (1) se scrie

$$\overrightarrow{SP_1}=\alpha(1-\lambda_1-\mu_1)\vec{u}+\lambda_1\vec{v}+\mu_1\vec{w}.$$

Analog, dacă notăm cu P_2 un punct din planul $AB'C$ și cu P_3 un punct din planul ABC', obținem

$$\overrightarrow{SP_2}=\mu_2\vec{u}+\beta(1-\lambda_2-\mu_2)\vec{v}+\lambda_2\vec{w},$$
$$\overrightarrow{SP_3}=\lambda_3\vec{u}+\mu_3\vec{v}+\gamma(1-\lambda_3-\mu_3)\vec{w}.$$

Punctul de intersecție al acestor plane este dat de ecuațiile

$$\overrightarrow{SP_1}=\overrightarrow{SP_2}=\overrightarrow{SP_3}.$$

De aici deducem

$$\begin{cases}\lambda_1=\mu_3=\dfrac{\beta(\alpha-1)(\gamma-1)}{2\alpha\beta\gamma-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma+1},\\ \mu_1=\lambda_2=\dfrac{\gamma(\alpha-1)(\beta-1)}{2\alpha\beta\gamma-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma+1},\\ \lambda_3=\mu_2=\dfrac{\alpha(\beta-1)(\gamma-1)}{2\alpha\beta\gamma-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma+1}.\end{cases}$$

Dacă notăm cu M punctul de intersecție al planelor $A'BC$, $AB'C$, ABC', avem

$$\overrightarrow{SM}=\frac{\alpha(\beta-1)(\gamma-1)\vec{u}+\beta(\alpha-1)(\gamma-1)\vec{v}+\gamma(\alpha-1)(\beta-1)\vec{w}}{2\alpha\beta\gamma-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma+1}.$$

Un punct Q_1 din planul $AB'C'$ va fi determinat de ecuația vectorială

$$\overrightarrow{SQ_1}=\overrightarrow{SA}+\xi_1\overrightarrow{AB'}+{}_1\overrightarrow{AC'}.$$

De aici rezultă

$$\overrightarrow{SQ_1}=\vec{u}(1-\xi_1-\eta_1)+\beta\xi_1\vec{v}+\gamma\eta_1\vec{w}.$$

Analog, notînd cu Q_2 și Q_3 două puncte oarecare din planele $A'BC'$, respectiv $A'B'C$, avem

$$\overrightarrow{SQ_2}=\alpha\eta_2\vec{u}+(1-\xi_2-\eta_2)\vec{v}+\gamma\xi_2\vec{w},$$
$$\overrightarrow{SQ_3}=\alpha\xi_3\vec{u}+\beta\eta_3\vec{v}+(1-\xi_3-\eta_3)\vec{w}.$$

Punctul de intersecție al celor trei plane este dat de ecuațiile

$$\overrightarrow{SQ_1}=\overrightarrow{SQ_2}=\overrightarrow{SQ_3}.$$

Notînd acest punct cu N, avem

$$\overrightarrow{SN}=\frac{\alpha[\alpha(\beta-1)(\gamma-1)\vec{u}+\beta(\alpha-1)(\gamma-1)\vec{v}+\gamma(\alpha-1)(\beta-1)\vec{w}]}{(\alpha\beta-1)(\alpha\gamma-1)-(\alpha-1)^2}.$$

Rezultă

$$\overrightarrow{SN}=\frac{2\alpha\beta\gamma-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma+1}{\alpha\beta\gamma-\alpha-\beta-\gamma+2}\overrightarrow{SM}.$$

Rezultă că punctele S, M, N sînt coliniare.

21. *Să se demonstreze că suma pătratelor distanțelor de la un punct M, nesituat în planul unui paralelogram, pînă la vîrfurile paralelogramului este egală cu de patru ori pătratul distanței de la punctul M la punctul de intersecție al diagonalelor adunat cu jumătate din suma pătratelor diagonalelor.*

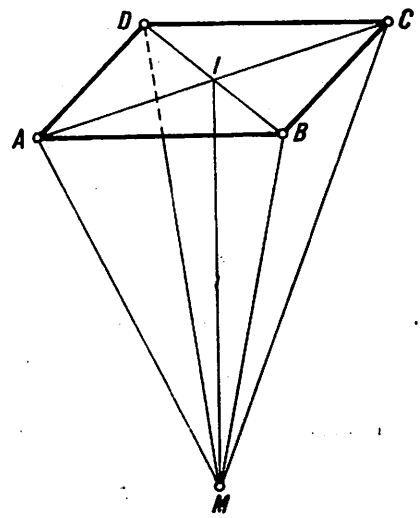


Figura 6

Soluție.

Fie $ABCD$ paralelogramul cu centrul I și M punctul exterior (fig. 6). Din triunghiul MIA rezultă

$$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}.$$

Dar

$$\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{AI}=-\frac{\overrightarrow{AC}}{2}.$$

Punctul I fiind mijlocul lui $\overrightarrow{AC}$, atunci

$$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MI}-\frac{\overrightarrow{AC}}{2}.$$

La fel

$$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{MI}+\frac{\overrightarrow{AC}}{2}.$$

Ridicînd la pătrat aceste ultime relații, obținem

$$MA^2=MI^2-\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{AC^2}{4},\quad MC^2=MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{AC^2}{4}.$$

Adunînd aceste relații, găsim

$$MA^2+MC^2=2MI^2+\frac{AC^2}{2}.$$

Analog se obține

$$MB^2+MD^2=2\,MI^2+\frac{BD^2}{2}.$$

Adunînd aceste relații găsim

$$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=4\,MI^2+\frac{1}{2}(AC^2+BD^2).$$

22. *Fie un paralelipiped ABCDEFGH, ale cărui diagonale AG, BH, CE, DF se întîlnesc într-un punct I. Dacă M este un punct exterior paralelipipedului să se demonstreze relația*

$$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2+ME^2+$$
$$+MF^2+MG^2+MH^2=8MI^2+$$
$$+\frac{1}{2}(AG^2+BH^2+CE^2+DF^2).$$

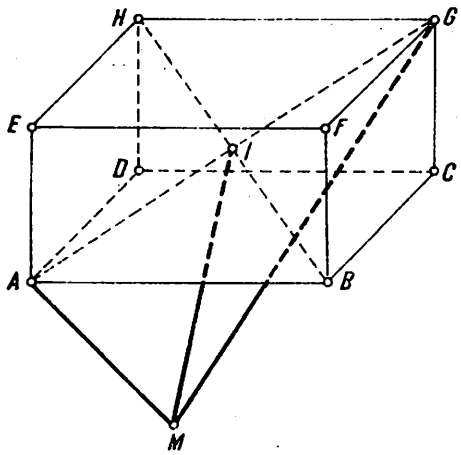


Figura 7

Soluție.

Din triunghiul *AMI* (fig. 7) rezultă

$$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}.$$

Dar $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{AI}=-\frac{\overrightarrow{AG}}{2}$, deci

$$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MI}-\frac{\overrightarrow{AG}}{2}.$$

Ridicînd această relație la pătrat găsim

$$MA^2=MI^2-\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{AG}+\frac{AG^2}{2}.$$

Analog găsim

$$MG^2=MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{AG}+\frac{AG^2}{4}.$$

Adunînd aceste două relații obținem

$$MA^2=MG^2=2\,MI^2+\frac{AG^2}{2}.$$

La fel

$$MB^2+MH^2=2\,MI^2+\frac{BH^2}{2},$$

$$MC^2+ME^2=2\,MI^2+\frac{EC^2}{2},$$

$$MD^2+MF^2=2\,MI^2+\frac{DF^2}{2}.$$

Adunînd aceste relații obținem egalitatea din enunț.

23. *Să se arate că dreptele care unesc mijloacele muchiilor opuse ale unui tetraedru sînt concurente într-un punct care le împarte în părți egale.*

Soluție.

Fie $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ vectorii de poziție ai vîrfurilor A, B, C, D ale tetraedrului în raport cu o origine O. Avem

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=\vec{c},\ \overrightarrow{OD}=\vec{d}.$$

Dacă notăm cu M mijlocul lui AB, cu N mijlocul lui CD, cu Q mijlocul lui AC, cu R mijlocul lui BD, cu S mijlocul lui AD și cu T mijlocul lui BC, avem

$$\overrightarrow{OM}=\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\quad \overrightarrow{ON}=\vec{n}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2},$$

$$\overrightarrow{OQ}=\vec{q}=\frac{\vec{a}+\vec{c}}{3},\quad \overrightarrow{OR}=\vec{r}=\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}$$

$$\overrightarrow{OS}=\vec{s}=\frac{\vec{a}+\vec{d}}{2},\quad \overrightarrow{OT}=\vec{t}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}.$$

Un punct P_1 de pe dreapta MN, al cărui vector de poziție este $\overrightarrow{OP_1}=\vec{p}_1$, satisface condiția vectorială

$$\vec{p}=\lambda\vec{m}+(1-\lambda)\vec{n}=\frac{\lambda}{2}(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1-\lambda}{2}(\vec{c}+\vec{d}).$$

Un punct P_2 de pe dreapta QR are vectorul de poziție $\overrightarrow{OP_2}=\vec{p}_2$, care satisface condiția

$$\vec{p}_2=\mu\vec{q}+(1-\mu)\vec{r}=\frac{\mu}{2}(\vec{a}+\vec{c})+\frac{1-\mu}{2}(\vec{b}+\vec{d}).$$

Un punct P_3 de pe dreapta ST are vectorul de poziție $\overrightarrow{OP_3}=\vec{p}_3$ care verifică relația

$$\vec{p}_3=\nu\vec{s}+(1-\nu)\vec{t}=\frac{\nu}{2}(\vec{a}+\vec{d})+\frac{1+\nu}{2}(\vec{b}+\vec{c}).$$

Pentru ca dreptele MN și QR să aibă un punct comun trebuie ca să existe o valoare a lui λ și una a lui μ astfel încît să avem

$$\overrightarrow{p_1}=\overrightarrow{p_2},$$

sau

$$\frac{\lambda-\mu}{2}\vec{a}+\frac{\lambda+\mu-1}{2}\vec{b}+\frac{1-\lambda-\mu}{2}\vec{c}+\frac{\mu-\lambda}{2}\vec{d}=0.$$

Această relație are loc pentru $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$.

Deci, dreptele MN și QR se intersectează în punctul P, al cărui vector de poziție este

$$\vec{p}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}.$$

Pentru $\nu=\frac{1}{2}$ avem $\vec{p}_3=\vec{p}$, deci și dreapta ST trece prin P. Din expresia vectorului $\vec{p}$ rezultă că punctul P este mijlocul segmentelor MN, QR, ST.

24. *Se consideră vectorii* $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$, $\vec{A}_3$, *care formează un triunghi* $P_1P_2P_3$, și vectorii

$$\vec{B}_1=\alpha_1\vec{A}_2+(\alpha_1-1)\vec{A}_3,$$
$$\vec{B}_2=\alpha_2\vec{A}_3+(\alpha_2-1)\vec{A}_1,$$
$$\vec{A}_3=\alpha_3\vec{A}_1+(\alpha_3-1)\vec{A}_2,$$

trecînd prin punctele P_1, P_2, P_3.

Să se determine condiția ca dreptele pe care se află vectorii $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$ *să fie concurente.*

N. Teodorescu

Soluție.

Pentru ca cele trei drepte să fie concurente trebuie să existe două numere λ și μ nenule, astfel încît

$$\vec{B}_1=\lambda\vec{B}_2+\mu\vec{B}_3. \tag{1}$$

Înlocuind aici valorile vectorilor $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$, obținem relația

$$\alpha_1\vec{A}_2+(\alpha_1-1)\vec{A}_3=\lambda[\alpha_2\vec{A}_3+(\alpha_2-1)\vec{A}_1]+\mu[\alpha_3\vec{A}_1+(\alpha_3-1)\vec{A}_2]$$

sau

$$[\lambda(\alpha_2-1)+\mu\alpha_3]\vec{A}_1+[\mu(\alpha_3-1)-\alpha_1]\vec{A}_2+[\lambda\alpha_2-\alpha_1+1]\vec{A}_3=0.$$

Întrucît vectorii $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$, $\vec{A}_3$ formează un triunghi, rezultă că egalitatea (1) are loc dacă și numai dacă

$$\lambda(\alpha_2-1)+\mu\alpha_3=0,\ \mu(\alpha_3-1)-\alpha_1=0,\ \lambda\alpha_2-\alpha_1+1=0.$$

Din aceste relații rezultă

$$\lambda\mu[\alpha_1\alpha_2\alpha_3-(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)]=0.$$

Ținînd seama că $\lambda\mu \neq 0$, de aici deducem condiția cerută

$$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3=(1-\alpha_1)\ (1-\alpha_2)\ (1-\alpha_3).$$

25. *Să se afle coordonatele simetricului* $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *al punctului* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, *față de dreapta* $\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$.

Soluție.

Ecuația vectorială a dreptei este

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\lambda\vec{\rho}, \tag{1}$$

unde

$$\vec{r}_0=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k},\ \vec{\rho}=l\vec{i}+m\vec{j}+n\vec{k}.$$

Mijlocul M_3 al lui M_2M_1 trebuie să fie situat pe dreapta (1).

Dar $\overrightarrow{OM_3}=\vec{r}_3=\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2}$ deci

$$\vec{r}_3=\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2}=\vec{r}_0+\lambda\vec{\rho}. \tag{2}$$

Pe de altă parte, $\overrightarrow{M_1M_2}$ trebuie să fie perpendicular pe $\vec{\rho}$, deci

$$(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\vec{\rho}=0. \tag{3}$$

Din relația (2) rezultă $\vec{r}_2=-\vec{r}_1+2\vec{r}_0+2\lambda\vec{\rho}$, adică $\vec{r}_2-\vec{r}_1=2(\vec{r}_0-\vec{r}_1+\lambda\vec{\rho})$, iar din (3),

$$(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\vec{\rho}=2\vec{\rho}\,(\vec{r}_0-\vec{r}_1+\alpha\vec{\rho}),$$

de unde $\lambda=\frac{\vec{r}_1\vec{\rho}-\vec{r}\cdot\vec{\rho}}{\rho^2}$. Rezultă

$$\vec{r}_2=-\vec{r}_1+2\vec{r}_0+2\lambda\vec{\rho}=-\vec{r}_1+2\vec{r}_0+2\frac{\vec{r}_1\vec{\rho}-\vec{r}_0\vec{\rho}}{\rho^2}\vec{\rho}.$$

Proiectînd această relație pe axe, se obține

$$x_2=-x_1+2a+2\frac{lx_1+my_1+nz_1-al-bm-cn}{l^2+m^2+n^2}l,$$

$$y_2=-y_1+2b+2\frac{lx_1+my_1+nz_1-al-bm-cn}{l^2+m^2+n^2}m,$$

$$z_2=-z_1+2c+2\frac{lx_1+my_1+nz_1-al-bm-cn}{l^2+m^2+n^2}n,$$

adică

$$x_2 = \frac{1}{l^2+m^2+n^2}[(l^2-m^2-n^2)x_1+2lmy_1+2lnz_1+c(m^2+n^2)-2blm-2cln],$$

$$y_2 = \frac{1}{l^2+m^2+n^2}[2lmx_1+(-l^2+m^2-n^2)y_1+2mnz_1-2alm_1+b(m^2+n^2)-$$
$$-2cmn],$$

$$z_2 = \frac{1}{l^2+m^2+n^2}[2lnx_1+2mny_1+(-l^2-m^2+n^2)z_1-2aln-2bmn+c(l^2+m^2)].$$

26. *Fiind dat un plan de ecuație*

$$Ax+By+Cz+D=0$$

și un punct $M_1(x_1, y_1, z_1)$, *să se afle coordonatele punctului* $M_2(x_2, y_2, z_2)$, *simetricului* M *față de planul dat.*

Soluție.

Să notăm cu $\vec{a}$ vectorul de componente A, B, C, cu $\vec{r}$ vectorul de poziție al unui punct de coordonate x, y, z și $\vec{r}_1$ vectorul de poziție a lui M_1. Ecuația (1) se scrie vectorial $\vec{a}\vec{r}+D=0$.

Dacă M_2 este simetricul lui M_1 față de plan, atunci $\vec{r}_3=\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2}$ este vectorul de poziție al unui punct M, situat în planul (1).

Deci, $\vec{a}\vec{r}_3+D=0$, adică

$$\vec{a}\vec{r}_1+\vec{a}\vec{r}_2=-2D. \tag{2}$$

Pe de altă parte, vectorul $\vec{r}_2-\vec{r}_1=\overrightarrow{M_1M_2}$ trebuie să fie un vector perpendicular pe planul (1), deci paralelă cu $\vec{a}$.

Atunci $\vec{r}_2-\vec{r}_1=\lambda\vec{a}$ sau

$$\vec{r}_2=\vec{r}_1+\lambda\vec{a}.$$

Introducînd valoarea lui $\vec{r}_2$ din (3) în (2), rezultă

$$\vec{a}\vec{r}_1+\vec{a}\vec{r}+\lambda a^2=-2D \text{ sau } y=-\frac{2(D+\vec{a}\vec{r}_1)}{a^2},$$

de unde

$$\vec{r}_2=\vec{r}_1-2\frac{(\vec{a}\vec{r}_1+D)}{a^2}\vec{r}.$$

Proiectînd această relație pe axele de coordonate, obținem

$$x_2=x_1-\frac{2(Ax_1+By_1+Cz_1+D)}{A^2+B^2+C^2}A,$$
$$y_2=y_1-\frac{2(Ax_1+By_1+Cz_1+D)}{A^2+B^2+C^2}B,$$
$$z_2=z_1-\frac{2(Ax_1+By_1+Cz_1+D)}{A^2+B^2+C^2}C,$$

sau

$$x_2=\frac{1}{A^2+B^2+C^2}[(-A^2+B^2+C^2)x_1-2ABy_1-2ACz_1-2AD],$$
$$y_2=\frac{1}{A^2+B^2+C^2}[-ABx_1+(A^2-B^2+C^2)y_1-2BCz_1-2BD],$$
$$z_2=\frac{1}{A^2+B^2+C^2}[-2ACx_1-2BCy_1+(A^2+B^2-C^2)z_1-2CD]$$

27. *Să se arate dacă într-un tetraedru ABCD două perechi de muchii opuse sînt ortogonale, atunci și cea de a treia pereche de muchii opuse este formată din drepte ortogonale.*

Soluție.

Să demonstrăm identitatea vectorială

$$(\vec{a}-\vec{b})(\vec{c}-\vec{d})+(\vec{b}-\vec{c})(\vec{a}-\vec{d})+(\vec{c}-\vec{a})(\vec{b}-\vec{d})=0. \quad (1)$$

Dezvoltînd obținem

$$\vec{a}\vec{c}-\vec{a}\vec{d}-\vec{b}\vec{c}+\vec{b}\vec{d}+\vec{a}\vec{b}-\vec{b}\vec{d}-\vec{a}\vec{c}+\vec{c}\vec{d}+\vec{c}\vec{b}-\vec{c}\vec{d}-\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{d}=0.$$

Să notăm $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{OD}=\vec{d}$. Avem

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA},\ \vec{c}-\vec{d}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DC},$$
$$\vec{b}-\vec{c}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB},\ \vec{a}-\vec{d}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DA},$$
$$\vec{c}-\vec{a}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AC},\ \vec{b}-\vec{d}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DB}.$$

Relația (1) devine

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=0. \quad (2)$$

Dacă $\overrightarrow{AB}$ este perpendiculară pe $\overrightarrow{DC}$ și $\overrightarrow{CB}$ pe $\overrightarrow{DA}$, avem

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\ \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DA}=0,$$

deci relația (2) devine $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=0$, adică $\overrightarrow{AC}$ este perpendiculară pe $\overrightarrow{DB}$.

28. *Să se demonstreze că planele care trec prin mijloacele muchiilor unui tetraedru și sînt perpendiculare pe aceste muchii se intersectează într-un punct.*

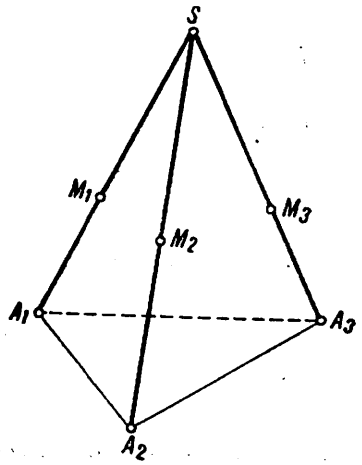


Figura 8

Soluție.

Fie $SA_1A_2A_3$ tetraedrul (fig. 8). Notăm $\overrightarrow{SA_1}=\vec{a}_1$, $\overrightarrow{SA_2}=\vec{a}_2$, $\overrightarrow{SA_3}=\vec{a}_3$;
M_1, M_2, M_3 fiind mijloacele lui SA_1, SA_2, SA_3, avem

$$\overrightarrow{SM}_1=\frac{\vec{a}_1}{2},\quad \overrightarrow{SM}_2=\frac{\vec{a}_2}{2},\quad \overrightarrow{SM}_3=\frac{\vec{a}_3}{2},$$

iar M_{12}, M_{23}, M_{31} fiind mijloacele lui A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1, avem

$$\overrightarrow{SM}_{12}=\frac{\vec{a}_1+\vec{a}_2}{2},\quad \overrightarrow{SM}_{23}=\frac{\vec{a}_2+\vec{a}_3}{2},\quad \overrightarrow{SM}_{31}=\frac{\vec{a}_3+\vec{a}_4}{2}.$$

Ecuația unui plan perpendicular pe $\vec{a}$ este

$$\vec{a}_1\cdot\overrightarrow{SM}=C_1, \tag{1}$$

unde C_1 este o constantă pe care o determinăm impunînd condiția ca planul (1) să treacă prin M_1:

$$\vec{a}_1\cdot\overrightarrow{SM}=\vec{a}_1\cdot\frac{\vec{a}_1}{2}=C_1$$

Deci, planul (P_1), perpendicular pe $\vec{a}_1$ și care trece prin M_1 are ecuația

$$\vec{a}_1\cdot\overrightarrow{SM}=\frac{a_1^2}{2}. \tag{2}$$

La fel, pentru planul (P_2), respectiv (P_3), avem

$$\vec{a}_2\cdot\overrightarrow{SM}=\frac{a_2^2}{2}, \tag{3}$$

$$\vec{a}_3\cdot\overrightarrow{SM}=\frac{a_3^2}{2}. \tag{4}$$

Aceste trei plane au în general un punct comun, care se găsește punînd:

$$\overrightarrow{SM}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\lambda_3\vec{a}_3 \tag{5}$$

Ținînd seama de condiție (5) în relațiile (2), (3), (4), obținem sistemul

$$\begin{cases} \lambda_1 \vec{a}_1^2 + \lambda_2 \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 = \dfrac{a_1^2}{2}, \\ \lambda_1 \vec{a}_1 \vec{a}_2 + \lambda_2 \vec{a}_2^2 + \lambda_3 \vec{a}_2 \vec{a}_3 = \dfrac{a_2^2}{2}, \\ \lambda_1 \vec{a}_1 \vec{a}_3 + \lambda_2 \vec{a}_2 \vec{a}_3 + \lambda_3 \vec{a}_3^2 = \dfrac{a_3^2}{2}, \end{cases} \tag{6}$$

în necunoscutele λ_1, λ_2, λ_3. Determinantul acestui sistem este

$$D = \begin{vmatrix} \vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2 & \vec{a}_1\vec{a}_3 \\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2 & \vec{a}_2\vec{a}_3 \\ \vec{a}_3\vec{a}_1 & \vec{a}_3\vec{a}_2 & \vec{a}_3\vec{a}_3 \end{vmatrix}.$$

Acest determinant (determinantul lui Gram) este diferit de zero dacă cei trei vectori $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ sînt liniar independenți.

În cazul unui tetraedru nedegenerat, această condiție este îndeplinită.

Să scriem ecuația planului (P_{12}) care trece prin punctul M_{12}, mijlocul lui $\vec{A}_1$ $\vec{A}_2$, și este perpendicular pe $\vec{A}_1$ $\vec{A}_2$. Rezultă

$$\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{A_1A_2} = C_{12}$$

Dar $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$. Să punem condiția ca planul (P_{12}) să treacă prin punctul M_{12}, adică

$$\overrightarrow{SM}_{12}(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = \frac{\vec{a}_2 + \vec{a}_1}{2}(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = \frac{a_2^2 - a_1^2}{2} = C_{12}.$$

Deci, ecuația planului (P_{12}) devine

$$(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)\overrightarrow{SM} = \frac{a_2^2 - a_1^2}{2}.$$

La fel, pentru planul (P_{23}), respectiv (P_{31}), avem

$$(\vec{a}_3 - \vec{a}_2)\overrightarrow{SM} = \frac{a_3^2 - a_2^2}{2}, \quad (\vec{a}_1 - \vec{a}_3)\overrightarrow{SM} = \frac{a_1^2 - a_3^2}{2}.$$

Se observă că ecuația (3) este diferența dintre a doua ecuație (6) și prima ecuație (6). Deci, sistemul este compatibil.

În mod analog se procedează pentru planele (P_{23}), (P_{31}).

29. Să se rezolve sistemul de ecuații vectoriale

$$\vec{a}\cdot\vec{r}=m,\quad \vec{b}\cdot\vec{r}=n,\quad \vec{c}\cdot\vec{r}=p, \tag{1}$$

$\vec{r}$ fiind vectorul necunoscut, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ trei vectori necoplanari cunoscuți, iar m, n, p trei scalari.

I. F. Landon

Soluție.

Să introducem vectorii reciproci $\vec{a}^*$, $\vec{b}^*$, $\vec{c}^*$ ai vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Acești vectori verifică relațiile

$$\vec{a}^*\cdot\vec{a}=1,\quad \vec{a}^*\cdot\vec{b}=0,\quad \vec{a}^*\cdot\vec{c}=0; \tag{2}$$

$$\vec{b}^*\cdot\vec{a}=0,\quad \vec{b}^*\cdot\vec{b}=1,\quad \vec{b}^*\cdot\vec{c}=0; \tag{2'}$$

$$\vec{c}^*\cdot\vec{a}=0,\quad \vec{c}^*\cdot\vec{b}=0,\quad \vec{c}^*\cdot\vec{c}=1. \tag{2''}$$

Din ultimele două relații (2) rezultă că vectorul a^* este perpendicular pe planul vectorilor $\vec{b}$ și $\vec{c}$, adică

$$\vec{a}^*=\alpha\,(\vec{b}\times\vec{c}).$$

Înlocuind această valoare în prima ecuație (2), obținem

$$\alpha(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=1,$$

de unde

$$\alpha=\frac{1}{(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})},$$

deci

$$\vec{a}^*=\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})}.$$

Analog avem

$$\vec{b}^*=\frac{\vec{c}\times\vec{a}}{(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})}\qquad \vec{c}^*=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})}.$$

Să reprezentăm vectorul necunoscut $\vec{r}$ sub forma

$$\gamma=\lambda\vec{a}^*+\mu\vec{b}^*+\nu\vec{c}^*.$$

Inmulțind scalar această ecuație cu $\vec{a}$, obținem

$$\vec{a}\cdot\vec{\gamma}=\lambda\vec{a}\cdot\vec{a}^*+\mu\vec{a}\,\vec{b}^*+\nu\vec{a}\cdot\vec{c}^*,$$

sau, ținînd seama de prima ecuație (1) și de relațiile (2),

$$\lambda=m.$$

Analog găsim

$$\mu=n,\quad \nu=p.$$

Inlocuind aceste valori în (3), deducem

$$\vec{r}=m\vec{a}^*+n\vec{b}^*+p\vec{c}^*.$$

Avînd în vedere aici valorile vectorilor $\vec{a}^*$, $\vec{b}^*$, $\vec{c}^*$, rezultă

$$\gamma=\frac{1}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}[m(\vec{b}\times\vec{c})+n(\vec{c}\times\vec{a})+p(\vec{a}\times\vec{b})].$$

Capitolul V

Cercul şi conicele pe ecuaţii reduse

Cercul

Ecuaţia cercului cu centrul în punctul $C(a, b)$ şi cu raza r este

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0. \tag{1}$$

Ecuaţia

$$x^2+y^2+2\alpha x+2\beta y+\gamma=0 \tag{1'}$$

reprezintă un cerc cu centrul în $C(-\alpha,-\beta)$ şi cu raza $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\gamma}$

Cercul (1) are următoarele reprezentări parametrice

$$x=a+r\cos\varphi, \qquad y=b+r\sin\varphi$$

şi

$$x=a+r\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y=b+r\frac{2t}{1+t^2}.$$

Tangenta la cercul (1) în punctul $M(x_0, y_0)$ de pe cerc are ecuaţia

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)-r^2=0$$

Tangenta la cercul (1), paralelă cu direcţia m, este

$$y-b=m(x-a)\pm r\sqrt{1+m^2}.$$

Polara punctului $M(x_0, y_0)$ faţă de cercul (1) are ecuaţia

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)-r^2=0$$

Fiind date cercurile

$$(\Gamma_1): \quad x^2+y^2+2\alpha_1 x+2\beta_1 y+\gamma_1=0,$$
$$(\Gamma_2) \quad x^2+y^2+2\alpha_2 x+2\beta_2 y+\gamma_2=0,$$

axa lor radicală este dreaptă

$$2(\alpha_1-\alpha_2)x+2(\beta_1-\beta_2)y+\gamma_1-\gamma_2=0.$$

Fasciculul de cercuri cu cercurile de bază (Γ_1) şi (Γ_2) are ecuaţia

$$\Gamma_1+\lambda\Gamma_2=0.$$

Dacă notăm cu θ unghiul cercurilor (Γ_1) şi (Γ_2), avem

$$\cos\theta=\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2-\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2-\gamma_1}\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2-\gamma_2}}.$$

Cele două cercuri sînt ortogonale dacă

$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2=\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2).$$

Elipsa

Ecuaţia elipsei raportată la axele sale este

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Elipsa are următoarele reprezentări parametrice

$$x=a\cos\varphi,\quad y=b\sin\varphi$$

şi

$$x=a\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=b\frac{2t}{1+t^2}.$$

Focarele elipsei sînt punctele $F_1(c, 0)$ şi $F_2(-c, 0)$, unde $c^2=a^2-b^2$. iar directoarele corespunzătoare acestor focare sînt dreptele

$$x=\frac{a^2}{c},\quad x=-\frac{a^2}{c}.$$

Excentricitatea elipsei este $e=\frac{c}{a}<1$.

Tangenta la elipsă în punctul $M(x_0, y_0)$ de pe elipsă este

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-1=0.$$

Tangenta paralelă cu direcţia m are ecuaţia

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$$

Polara punctului $M(x_0, y_0)$ este

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-1=0.$$

Diametrul conjugat cu direcţia m este

$$y=-\frac{b^2}{ma^2}x.$$

Hiperbola

Ecuația hiperbolei raportată la axele sale este

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Această hiperbolă are următoarele reprezentări parametrice

$$x=b\operatorname{tg}\varphi,\quad y=\frac{a}{\cos\varphi}$$

sau

$$x=b\frac{2t}{1-t^2},\quad y=a\frac{1+t^2}{1-t^2},$$

sau

$$x=a\operatorname{ch}\varphi,\quad y=b\operatorname{sh}\varphi.$$

Focarele hiperbolei sînt punctele F_1 $(c, 0)$, F_2 $(-c, 0)$, unde $c^2=a^2+b^2$, iar directoarele corespunzătoare acestor focare sînt dreptele

$$x=\frac{a^2}{c},\quad x=-\frac{a^2}{c}.$$

Excentricitatea hiperbolei este $e=\frac{c}{a}<1$.

Asimptotele hiperbolei sînt dreptele

$$y=\frac{b}{a}x,\quad y=-\frac{b}{a}x.$$

Tangenta la hiperbolă în punctul M (x_0, y_0) de pe hiperbolă este

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}-1=0.$$

Tangenta paralelă cu direcția m are ecuația

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}.$$

Polara punctului $M(x_0, y_0)$ este

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}-1=0.$$

Diametrul conjugat cu direcția m are ecuația

$$y=\frac{b^2}{ma^2}x.$$

Parabola

Ecuația parabolei raportată la axa ei și la tangenta la vîrf este

$$y^2=2px.$$

Reprezentarea parametrică a parabolei este

$$x=2pt^2,\ y=2pt.$$

Focarul parabolei este $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, iar directoarea are ecuaţia

$$x=-\frac{p}{2}.$$

Excentricitatea parabolei este egală cu unitatea.
Tangenta la parabolă în punctul M (x_0, y_0) are ecuaţia

$$yy_0=p(x+x_0).$$

Tangenta paralelă cu direcţia m este

$$y=mx+\frac{p}{2m}.$$

Polara punctului $M(x_0, y_0)$ este

$$y\ y_0=p(x+x_0).$$

Probleme

1. *Fiind dat un cerc şi un punct M, se duc perpendicularele MA, MB. Să se găsească locul geometric al mijlocului coardei AB.*

Soluţie.

Luăm ca axe de coordonate diametrul MC şi perpendiculara pe aceasta My, unde C este centrul cercului. Ecuaţia cercului este

$$x^2+y^2-2ax+a^2-r^2=0.$$

Dacă notăm cu (x_1, y_1), (x_2, y_2) coordonatele punctelor A, B, avem

$$x_1^2+y_1^2-2ax_1+a^2-r^2=0, \tag{1}$$

$$x_2^2+y_2^2-2ax_2+a^2-r^2=0, \tag{2}$$

$$x_1x_2+y_1y_2=0. \tag{3}$$

Coordonatele mijlocului N al segmentului AB sînt

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

Ecuația locului geometric al punctului N se obține eliminînd pe x_1, y_1, x_2, y_2 între ecuațiile (1), (2), (3), (4). Adunînd ecuațiile (1) și (2) obținem

$$x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2-2a(x_1+x_2)+2(a^2-r^2)=0$$

și ținînd seama de (3) și (4) avem

$$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2-4ax+2(a^2-r^2)=0$$

sau

$$x^2+y^2-ax+\frac{a^2-r^2}{2}=0.$$

Locul geometric căutat este deci cercul avînd ca centru mijlocul segmentului MC și ca rază $\frac{1}{2}\sqrt{2r^2-a^2}$.

2. Într-un sistem de axe ortogonale se consideră cercul

$$x^2+y^2-2x-4y+4=0$$

și punctul $A(2, 0)$.

Să se determine punctele P ale cercului (1) astfel încît să avem

$$\overline{AP}=k.\overline{OP}. \tag{2}$$

unde O este origina axelor de coordonate, iar k este un număr pozitiv.

Să se discute problema după valorile lui k.

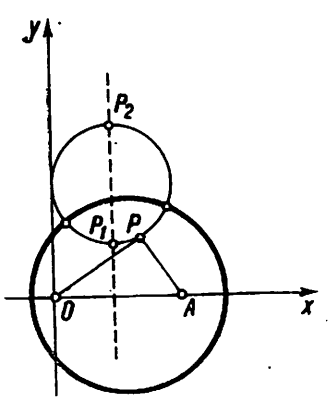


Figura 9.

Soluție.

Vom afla întîi locul geometric al punctelor din plan care satisfac relația (2).

Acest loc geometric (fig. 9) are ecuația

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=k\sqrt{x^2+y^2}$$

sau

$$(1-k^2)(x^2+y^2)-4x+4=0. \tag{3}$$

Pentru a găsi punctele căutate trebuie să intersectăm curbele (1) și (3).

Dacă $k=1$, ecuația (3) se reduce la $x=1$, deci problema este rezolvată de două puncte ale cercului (1) și anume $P_1(1, 1)$, $P_2(1, 3)$.

Dacă $k\neq 1$, ecuația (3) se scrie

$$\left(x-\frac{2}{1-k^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{2k}{1-k^2}\right)^2 \tag{3'}$$

și reprezintă un cerc cu centrul în $C_1\left(\frac{2}{1-k^2}, 0\right)$ și cu raza $r=\frac{2k}{|1-k^2|}$.

Avînd în vedere că cercul (1) are centrul în C (1, 2) și raza 1,

rezultă că cele două cercuri (1) şi (3') se intersectează dacă

$$|1-r| \leqslant \overline{CC_1} \leqslant 1+r$$

sau

$$(1-r)^2 \leqslant \overline{CC_1}^2 \leqslant (1+r)^2. \tag{4}$$

Dar

$$\overline{CC_1}^2 = \left(1-\frac{2}{1-k^2}\right)^2+4 = \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2+4,$$

$$(1-r)^2 = 1+r^2-2r = \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 - \frac{4k}{|1-k^2|},$$

$$(1+r^2 = 1+r^2+2r = \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 + \frac{4k}{|1-k^2|}$$

şi deci inegalitatea (4) devine

$$-\frac{k}{|1-k^2|} \leqslant 1 \leqslant \frac{k}{|1-k^2|}$$

sau

$$-k \leqslant |1-k^2| \leqslant k.$$

Prima parte a inegalităţii este evidentă, deci condiţia problemei rămîne

$$|1-k^2| \leqslant k.$$

Avînd în vedere că ambii membri ai acestei inegalităţi sînt pozitivi, putem ridica la pătrat şi avem

$$k^4-3k^2+1 \leqslant 0,$$

de unde deducem

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leqslant k \leqslant \frac{\sqrt{5}+1}{2}. \tag{4'}$$

Deci, dacă $k \neq 1$ şi este satisfăcută condiţia (4') problema are două soluţii distincte sau confundate.

3. *Se consideră două drepte oblice* (D_1), (D_2) *care se taie în punctul* O. *Fie* A_1 *un punct pe* (D_1) *şi* A_2 *un punct pe* (D_2). *Cercul de diametru* $\overline{A_1A_2}$ *intersectează din nou dreptele* (D_1), (D_2) *în punctele* B_1, B_2. *Dacă notăm cu* C_1 *şi* C_2 *mijloacele segmentelor* $\overline{A_1A_2}$, *respectiv* $\overline{B_1B_2}$, *se cere:*

1° *Să se demonstreze că dacă* C_1 *descrie o dreaptă* (d_1), C_2 *descrie o altă dreaptă* (d_2).

2° *Presupunînd că punctele* A_1, A_2 *se mişcă pe dreptele* (D_1), (D_2), *astfel încît aria triunghiului* OA_1A_2 *să fie constantă, cercul de diametru* $\overline{A_1A_2}$ *rămîne ortogonal la un cerc fix.*

Soluție.

Luăm ca sistem de axe dreapta (D_1) și perpendiculara coborîtă în O pe (D_1). Ecuația dreptei (D_2) este $y=mx$. Punctele A_1 și A_2 sînt $A_1(2\alpha, 0)$ $A_2(2\beta, 2m\beta)$.

Cercul de diametru $\overline{A_1A_2}$ are ecuația

$$(C_1): x^2+y^2-2(\alpha+\beta)x-2m\beta y+4\alpha\beta=0. \tag{1}$$

Acest cerc taie dreptele (D_1) și (D_2) în punctele A_1 și A_2 și în

$$B_1(2\beta,0), B_2\left(\frac{2\alpha}{1+m^2}, \frac{2m\alpha}{1+m^2}\right).$$

Punctele C_1 și C_2 sînt

$$C_1(\alpha+\beta, m\beta), C_2\left(\frac{\alpha}{1+m^2}+\beta, \frac{m\alpha}{1+m^2}\right).$$

1° Dacă punctul C_1 descrie dreapta

$$(d_1): Ax+By+C=0,$$

rezultă că

$$A(\alpha+\beta)+Bm\beta+C=0. \tag{2}$$

In acest caz, dacă notăm cu x, y coordonatele lui C_2, deducem

$$\alpha=\frac{(1+m^2)y}{m}, \quad \beta=x-\frac{y}{m},$$

care înlocuite în (2) ne dau

$$(A+Bm)x+(Am-B)y+C=0.$$

Deci, dacă C_1 descrie o dreaptă, C_2 descrie tot o dreaptă.

2° Calculînd aria triunghiului DA_1A_2, obținem $4m\alpha\beta$. Deci,

$$\alpha=\frac{k}{4m\beta} \quad (k=\text{const}).$$

Inlocuind această valoare în ecuația cercului (C_1), obținem

$$x^2+y^2-2\left(\beta+\frac{k}{4m\beta}\right)x-2m\beta y+\frac{k}{m}=0. \tag{1'}$$

Vom considera acum un cerc oarecare de ecuație

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0.$$

Pentru ca acest cerc să fie ortogonal cu cercul (1'), trebuie ca

$$a\left(\beta+\frac{k}{4m\beta}\right)+Cm\beta-\frac{c}{2}-\frac{k}{2m}=0$$

Pentru orice valoare a lui β această relație se mai scrie

$$4m\beta^2(a+bm)-2\beta(mc+k)+ak=0.$$

De aici rezultă

$$a+bm=0,\ mc+k=0,\ ak=0,$$

adică

$$a=b=0,\ c=-\frac{k}{m}.$$

Deci, dacă aria triunghiului OA_1A_2 este constantă, cercurile (1) sînt ortogonale cercului

$$m(x^2+y^2)-k=0.$$

4. *Un unghi drept se deplasează astfel încît laturile sale sînt tangente la două cercuri fixe. Să se găsească locul geometric al mijlocului segmentului determinat de punctele de contact.*

Soluţie.

Fie

$$(x-a_1)^2+y^2-r_1^2=0,\ (x-a_2)^2+y^2-r_2^2=0$$

ecuaţiile celor două cercuri, linia centrelor fiind axa Ox. Un punct oarecare M_1 al primului cerc are coordonatele

$$x=a+\cos\varphi,\ y=r\ \sin\varphi$$

iar tangenta în acest punct la cerc are ecuaţia

$$(x-a)\cos\varphi\ +y\ \sin\varphi-r=0.$$

In mod analog se obţin coordonatele punctului M_2 şi tangenta în M_2 la cel de al doilea cerc, schimbînd în relaţiile de mai sus indicele 1 cu 2. Pentru ca tangentele să fie ortogonale trebuie să avem

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2=0$$

sau $\cos(\varphi_1-\varphi_2)=0$, de unde $\varphi_1-\varphi_2=\pm\frac{\pi}{2}$. Dacă luăm semnul plus avem $\varphi_1=\varphi_2+\frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi_1=-\sin\varphi_2$, $\sin\varphi_1=\cos\varphi_2$, iar mijlocul $\overline{M_1M_2}$ are coordonatele

$$x=\frac{a_1+r_1\cos\varphi_1+r_2\sin\varphi_1}{2},\ y=\frac{r_1\sin\varphi_1-r_2\sin\varphi_1}{2}$$

sau

$$x-\frac{a_1+a_2}{2}=\frac{r_1\cos\varphi_1+r_2\sin\varphi_1}{2},\ y=\frac{r_1\sin\varphi_1-r_2\cos\varphi_1}{2}.$$

Putem elimina pe φ_1 făcînd suma pătratelor

$$\left(x-\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2+y^2=\frac{r_1^2+r_2^2}{4}.$$

Același rezultat se obține dacă luăm $\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$.

5. *Să se găsească locul geometric al centrului cercurilor care intersectează două cercuri date după doi diametri.*

Soluție.

Să luăm ca axe de coordonate linia centrelor și axa radicală a celor două cercuri. Fie

$$x^2+y^2-2a_1x+b_1^2=0,$$

$$x^2+y^2-2a_2x+b_2^2=0,$$

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$

ecuațiile cercurilor fixe (C_1) și (C_2) și a cercului mobil (C).

Axa radicală a cercurilor (C_1) și (C), de ecuație.

$$2(a-a_1)x=2by+b_1^2-c=0,$$

trece prin centrul cercului (C_1) dacă avem

$$2a_1(a-a_1)+b_1^2-c=0. \tag{1}$$

Analog, coarda $A'B'$ este un diametru dacă

$$2a_1(a-a_1)+b_1^2-c=0. \tag{2}$$

Eliminînd pe c între relațiile (1) și (2), obținem ecuația locului centrului

$$a_1(a-a_1)-a_2(a-a_2)=0,$$

sau împărțind cu $a-a_1$, care este diferit de zero,

$$a=a_1+a_2.$$

Locul geometric al centrului cercului (C) este deci o paralelă la Oy.

6. *Fiind date două cercuri ortogonale (C) și (C'), să se găsească dreptele care intersectează (C) în punctele P, Q și (C') în R și S astfel încît $(PQRS)=-1$.*

Soluție.

Raportăm figura la sistemul de coordonate carteziene ortogonale cu originea în centrul (C) și cu axa x-ilor linia centrelor celor două cercuri. Unitatea de măsură o alegem egală cu raza cercului (C).

Ecuațiile celor două cercuri sînt

$$x^2+y^2=1,\quad x^2+y^2-2ax+1=0.$$

O dreaptă oarecare din plan are ecuaţia $y=mx+n$. Abscisele punctelor de intersecţie cu cercul (C) sînt soluţiile p şi q ale ecuaţiei

$$(1+m^2)x+2mnx+n^2-1=0, \tag{1}$$

iar abscisele punctelor de intersecţie cu (C') sînt soluţiile r şi s ale ecuaţiei

$$(1+m^2)x^2+2(mn-a)x+n^2+1=0. \tag{2}$$

Va trebui să determinăm m şi n astfel încît $(PQRS)=-1$, adică $\frac{r-p}{r-q}\cdot\frac{s-q}{s-p}=-1$, care este echivalentă cu

$$\frac{2(rs+pq)-(r+s)(p+q)}{(r-q)(s-p)}=0. \tag{3}$$

Numărătorul din (3), calculat în funcţie de coeficienţii ecuaţiilor (1) şi (2), este

$$\frac{4n(am+n)}{(1+m^2)^2},$$

care se anulează pentru $n=0$ (drepte prin O) şi pentru $n=-an$ (drepte prin centrul cercului (C').

Deci, dreptele care intersectează două cercuri în perechi de puncte conjugate armonic sînt dreptele care trec prin centrele celor două cercuri.

7. *Să se găsească locul geometric al punctului M de intersecţie al polarei unui punct fix, în raport cu cercurile care trec prin două puncte fixe, cu diametrul care trece prin acest punct.*

Soluţie.

Luăm ca axă Ox dreapta care uneşte cele două puncte fixe A, B şi ca axă Oy perpendiculara pe mijlocul lui AB. Dacă notăm $OA=a$ şi cu α, β coordonatele punctului fix P, ecuaţia cercurilor este

$$x^2+y^2-2\lambda y-a^2=0.$$

Ecuaţia polarei punctului P faţă de acest cerc este

$$\alpha x+\beta(y-\lambda)-\lambda y-a^2=0, \tag{1}$$

iar cea a diametrului CP,

$$\frac{y-\beta}{\beta-\lambda}=\frac{x-\alpha}{\alpha}. \tag{2}$$

Ecuaţia locului geometric al punctului M se obţine eliminînd parametrul λ între ecuaţiile (1) şi (2), care se mai poate scrie

$$\alpha x+\beta y-a^2-\lambda(\beta+y)=0,$$

$$\beta x-\alpha y-\lambda(x-\alpha)=0.$$

Rezultă

$$(\alpha x+\beta y-a^2)\ (x-\alpha)-(\beta x-\alpha y)\ (\beta+y)=0. \tag{3}$$

sau

$$\alpha\,(x^2+y^2)-(a^2+\alpha^2+\beta^2)\ x+a^2\alpha=0. \tag{4}$$

Ecuația (4) ne arată că locul geometric este un cerc avînd centrul pe *AB*, iar ecuația (3) ne arată că cercul trece prin punctul de intersecție al dreptelor

$$\alpha x+\beta y-a^2=0,\ x=\alpha$$

cu dreptele

$$\beta x-\alpha y=0,\ y=-\beta.$$

8. *Fie (C) un cerc fix din planul (P) și M un punct oarecare din acest plan. Să se demonstreze că cercurile care trec prin M și sînt ortogonale cercului (C) formează un fascicul. Dacă notăm cu M' al doilea punct de bază al fasciculului, să se determine legătura între M și M'.*

Soluție.

Raportăm figura la un sistem de axe ortogonale cu originea în centrul cercului (C). Ecuația acestuia va fi deci

$$(C):\ x^2+y^2-r^2=0, \tag{1}$$

Fie $M(a, b)$ un punct fix și $\omega(\alpha, \beta)$ un punct variabil din planul (P). Ecuația cercului cu centrul în ω și care trece prin M este

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2$$

sau

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+2a\alpha+2b\beta-a^2-b^2=0. \tag{2}$$

Pentru ca cercurile (1) și (2) să fie ortogonale trebuie ca

$$2a\alpha+2b\beta-a^2-b^2-r^2=0.$$

Scoțînd din această relație pe β și înlocuindu-l în (2), obținem ecuația cercurilor ortogonale cu cercul (C), care trec prin M:

$$b(x^2+y^2)-(a^2+b^2+r^2)y+br^2-2\alpha(bx-ay)=0.$$

Această ecuație reprezintă fasciculul de cercuri determinat de cercul

$$b(x^2+y^2)-(a^2+b^2+r^2)y+br^2=0 \tag{3}$$

și de dreapta

$$bx-ay=0. \tag{4}$$

Dreapta (4) este axa radicală a fasciculului de cercuri. Punctele de bază ale fasciculului se obțin intersectînd cercul (3) cu dreapta (4).

Rezolvînd sistemul (3), (4), obținem punctul $M(a,b)$ și punctul M' $\left(\frac{r^2 a}{a^2+b^2}, \frac{r^2 b}{a^2+b_2}\right)$.

Avînd în vedere expresia coordonatelor punctului M rezultă că M' este inversul punctului M în inversiunea de centru O și de cerc fundamental (C).

9. Se dă un cerc și două diametre ortogonale AA' și BB'. Prin punctul B se duce o secantă oarecare, care intersectează cercul în C, iar dreapta AA' în D. Tangenta la cerc în C întîlnește în M perpendiculara dusă la AA' prin D. Să se găsească locul geometric al punctului M.

Soluție.

Fie $x^2+y^2-R^2=0$ ecuația cercului, axele de coordonate fiind diametrele $A'A$ și $B'B$. O secantă oarecare trecînd prin punctul B are ca ecuație $y-R=\lambda x$; ea întîlnește cercul în punctele $B(O,R)$ și C, de coordonate

$$x_0=\frac{-2R\lambda}{1+\lambda^2},\ y_0=\frac{R(1-\lambda^2)}{1+\lambda^2}.$$

Tangenta în C la cerc are ecuația

$$xx_0+yy_0-R^2=0,$$

sau

$$2\lambda x+y(\lambda^2-1)+R(\lambda^2+1)=0. \tag{1}$$

Punctul D în care secanta BC întîlnește axa Ox avînd ca abscisă $\frac{R}{\lambda}$ ecuația perpendicularei DM este

$$x=-\frac{R}{2} \tag{2}$$

Ecuația locului geometric al punctului M se obține eliminînd pe λ între ecuațiile (1) și (2).

Din ecuația (2) scoatem pe $\lambda=\frac{R}{x}$ și înlocuim în ecuația (1); obținem

$$2R+y\left(\frac{R^2}{x^2}-1\right)-R\left(\frac{R^2}{x^2}+1\right)=0$$

sau

$$(x-R)\ (x+R)\ (y+R)=0,$$

care reprezintă trei drepte tangente la cerc în punctele A, A', B'.

Dacă luăm un punct oarecare (x, y) pe dreapta $x=R$, ecuațiile (1) și (2) au o soluție comună în λ, care este dată de ecuația (2), $\lambda=-\frac{R}{x}=-1$. Dacă înlocuim această valoare a lui λ în ecuațiile (1) și (2), ele se reduc la ecuația $x-R=0$.

10. *Dacă un cerc mobil intersectează două cercuri fixe sub un unghi constant, el intersectează cercurile având aceeași axă radicală sub un unghi constant și este tangent la două cercuri fixe.*

Soluție.

Fie

$$C\equiv(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0,\quad C_1\equiv(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-R_1^2=0$$

ecuațiile celor două cercuri, ρ raza cercului mobil, d, d_1 distanțele centrului cercului mobil la centrele cercurilor fixe și ω, ω_1 unghiurile sub care cercurile mobile intersectează cercurile fixe.

Avem

$$d^2=\rho^2+R^2-2R\rho\cos\omega,\quad d_1^2=\rho^2-2R_1\rho\cos\omega_1.$$

Deci, ecuațiile celor două cercuri fixe sînt

$$C=\rho^2-2R\rho\cos\omega,\quad C_1=\rho^2-2R_1\rho\cos\omega_1$$

Rezultă

$$\frac{C+\lambda C_1}{1+\lambda}=\rho^2-2\rho\frac{R\cos\omega+\lambda R_1\cos\omega_1}{1+\lambda}.$$

Dacă notăm cu R_2 raza cercului $C+\lambda C_1$, cercul mobil intersectează acest cerc sub un unghi ω_2, definit de relația

$$R_2\cos\omega_2=\frac{R\cos\omega+\lambda R_1\cos\omega_1}{1+\lambda}.$$

Raza R_2 este dată de relația

$$(1+\lambda)^2R_2^2=(1+\lambda)(R^2+\lambda R_1^2)-\lambda[(a-a_1)^2+(b-b_1)^2].$$

Pentru ca cercul mobil să fie tangent la cercul de rază R_2, trebuie ca $\cos\omega_2$ să fie egal cu unu, adică să avem

$$(1+\lambda)R_2=R\cos\omega+\lambda R_1\cos\omega_1.$$

Deci, λ este rădăcina ecuației

$$(1+\lambda)(R^2+\lambda R_1^2)-\lambda d_2^2=(R\cos\omega+\lambda R_1\cos\omega_1)^2,$$

unde am notat cu d_2 distanța centrelor cercurilor C și C_1.

Această ecuație de gradul al doilea în λ ne arată că cercul mobil este tangent la cele două cercuri care corespund rădăcinilor acestei ecuații.

11. *Să se scrie ecuația generală a cercurilor tangente la axa Ox și care fac cu axa Oy un unghi constant φ. Să se determine înfășurătoarea acestei familii de cercuri.*

Soluţie.

Fie

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0. \tag{1}$$

ecuaţia generală a unui cerc.

Punînd condiţia ca acest cerc să fie tangent la axa Ox, obţinem $\gamma=\alpha^2$.

Intersectînd cercul (1) cu axa Oy, obţinem punctele

$$M_1(0, \beta-\sqrt{\beta^2-\alpha^2}),\quad M_2(0, \beta+\sqrt{\beta^2-\alpha^2}).$$

Tangenta la cercul (1) în punctul M_2 are ecuaţia

$$\alpha x-\sqrt{\beta^2-\alpha^2}\,y-\alpha^2+\beta^2+\beta\sqrt{\beta^2-\alpha^2}=0.$$

Avînd în vedere că unghiul făcut de cerc cu axa Oy este φ, rezultă

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right),$$

de unde deducem

$$\beta=\frac{\alpha}{\cos\varphi}.$$

Deci, ecuaţia cercurilor căutate este

$$x^2+y^2-2\alpha x-\frac{2\alpha}{\cos\varphi}y+\alpha^2=0. \tag{2}$$

Pentru a găsi ecuaţia înfăşurătoarei acestor cercuri, trebuie să scriem că ecuaţia (2), considerată în α, are rădăcini confundate, adică

$$2\cos\varphi\cdot xy+\sin^2\varphi\cdot y^2=0,$$

deci înfăşurătoarea căutată se compune din axa Ox şi dreapta de ecuaţie

$$2\cos\varphi\cdot x+\sin^2\varphi\cdot y=0.$$

12. *Intr-un plan raportat la două axe rectangulare se consideră sistemul de cercuri (S) definite de ecuaţia*

$$x^2+y^2+\lambda x+\mu y+A\lambda+B\mu+C=0,$$

unde A, B, C sînt constante date, iar λ, μ parametri variabili.

Să se demonstreze că fiecărui punct M din plan îi corespunde un punct M_2, astfel încît prin cele două puncte să treacă o infinitate de cercuri (S).

Să se arate cum se pot exprima coordonatele unuia din aceste puncte cu ajutorul coordonatelor celuilalt.

Să se demonstreze că dreapta M_1M_2 trece printr-un punct fix I, iar produsul $\overline{IM}_1\cdot IM_2$ este constant.

Soluție.

Dacă notăm cu (x_1, y_1) coordonatele lui M_1 și cu (x_2, y_2) cele ale lui M_2, cele două ecuații considerate în necunoscutele λ, μ

$$\begin{cases} \lambda_1(x_1+A)+\mu(y_1+B)+x_1^2+y_1^2+C=0, \\ \lambda_2(x_2+A)+\mu(y_2+B)+x_2^2+y_2^2+C=0, \end{cases}$$

admit o infinitate de soluții dacă avem

$$\frac{x_2+A}{x_1+A}=\frac{y_2+B}{y_1+B}=\frac{x_2^2+y_2^2+C}{x_1^2+y_1^2+C}=k.$$

Rezultă

$$x_2=kx_1+A(k-1),\ y_2=ky_1+B(k-1), \tag{1}$$

unde

$$k[(x_1+A)^2+(y_1+B)^2]=A^2+B^2+C. \tag{2}$$

Aceste formule dau coordonatele punctului M_2 în funcție de coordonatele punctului M_1.

Ecuația dreptei M_1M_2 este

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

sau înlocuind x_2, y_2 prin valorile lor (1) și simplificînd cu factorul nenul $k-1$, rezultă

$$\frac{x-x_1}{x_1+A}=\frac{y-y_1}{y_1+B}.$$

Această dreaptă trece prin punctul fix I_1, ale cărui coordonate sînt $-A$ și $-B$.

Produsul $\overline{IM}_1 \cdot \overline{IM}_2$ este dat de relația

$$\overline{IM}_1 \cdot \overline{IM}_2 = \sqrt{(x_1+A)^2+(y_1+B)^2} \cdot \sqrt{(x_2+A)^2+(y_2+B)^2} = k[(x_1+A)^2+(y_1+B)^2]=A^2+B^2+C;$$

acest produs este constant.

13. *Se consideră paralelogramele ABCD circumscrise unei elipse ale căror laturi sînt paralele cu două diametre conjugate.*

Fie *F unul din focarele elipsei. Se cere să se arate că*

$$1^\circ\ \overline{FA}^2+\overline{FB}^2+\overline{FC}^2+\overline{FD}^2=\text{const.}$$

2° *Locul geometric al ortocentrului triunghiului FAB este o elipsă care are aceleași axe cu elipsa dată.*

Soluţie.

1° Să presupunem elipsa raportată la axele sale şi fie $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ coordonatele punctului de contact a tangentei AB la elipsă. Ecuaţia tangentei AB este

$$bx\cos\varphi + ay\sin\varphi - ab = 0.$$

Ecuaţia lui BC se deduce schimbînd pe φ în $\varphi + \frac{\pi}{2}$:

$$-bx\sin\varphi + ay\cos\varphi - ab = 0.$$

iar aceea a lui AD schimbînd pe φ în $\varphi - \frac{\pi}{2}$, adică

$$bx\sin\varphi - ay\cos\varphi - ab = 0.$$

Rezolvînd sistemul format din ecuaţiile dreptelor AB şi AD obţinem coordonatele punctului A:

$$x = a(\cos\varphi + \sin\varphi),\quad y = b(\sin\varphi - \cos\varphi)$$

şi rezolvînd sistemul format din ecuaţiile dreptelor AB şi BC avem coordonatele punctului B:

$$x = a(\cos\varphi - \sin\varphi);\quad y = b(\cos\varphi + \sin\varphi).$$

Punctele C şi D sînt respectiv simetricele punctelor A şi B în raport cu originea axelor de coordonate.

Dacă considerăm focarul F(0,0), se verifică imediat că avem

$$\overline{FA}^2 + \overline{FB}^2 + \overline{FC}^2 + \overline{FD}^2 = 8a^2.$$

2°. Pentru a determina punctul de intersecţie al înălţimilor triunghiului FAB, putem lua punctul de intersecţie al perpendicularei coborîte din punctul F pe AB,

$$\frac{y}{x-c} = \frac{a\sin\varphi}{b\cos\varphi},$$

cu perpendiculara dusă din A pe FB

$$\frac{y - b(\sin\varphi - \cos\varphi)}{x - a(\cos\varphi + \sin\varphi)} = -\frac{a(\cos\varphi - \sin\varphi - c)}{b(\cos\varphi + \sin\varphi)}.$$

Rezolvînd sistemul format din aceste două ecuaţii, obţinem

$$x = -c\cos 2\varphi,\quad y = -\frac{ac}{b}\sin 2\varphi.$$

Eliminînd pe φ între aceste două relaţii, obţinem ecuaţia locului geometric

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{b^2y^2}{a^2c^2} = 1.$$

Locul geometric este deci o elipsă care are aceleași axe cu elipsa dată și ca semiaxe c, $\frac{b}{ac}$.

14. *Se consideră un sistem de axe de coordonate ortogonale xOy și o elipsă de ecuație*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Notăm cu M un punct oarecare de pe această elipsă, T_1 și T_2 punctele de intersecție ale tangentei în M la elipsă cu axele Ox și Oy, N_1 și N_2 punctele de intersecție ale normalei în M cu axele Ox și Oy, P mijlocul segmentului T_1T_2 și cu Q mijlocul segmentului N_1N_2.

Să se determine locul geometric al punctelor P și Q și să se arate că dreapta PQ este tangentă la locul geometric al punctului Q.

Soluție.

Considerăm punctul variabil M $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$. Tangenta în M la elipsă este

$$b\cos\varphi\cdot x+a\sin\varphi\cdot y-ab=0.$$

Intersecțiile acestei drepte cu axele Ox, Oy sînt

$$T_1\left(\frac{a}{\cos\varphi},\ 0\right),\ T_2\left(0,\ \frac{b}{\sin\varphi}\right).$$

Normala la elipsă în M are ecuația

$$a\sin\varphi\cdot x-b\cos\varphi\cdot y-c^2\sin\varphi\cos\varphi=0$$

și intersectează axele Ox, Oy, în punctele

$$N_1\left(\frac{c^2\cos\varphi}{a},\ 0\right),\ N_2\left(0,\ -\frac{c^2\sin\varphi}{b}\right).$$

Mijloacele segmentelor sînt P și Q:

$$P\left(\frac{a}{2\cos\varphi},\ \frac{b}{2\sin\varphi}\right),\ Q\left(\frac{c^2\cos\varphi}{2a},\ \frac{-c^2\sin\varphi}{2b}\right).$$

Notînd cu

$$x=\frac{a}{2\cos\varphi},\ y=\frac{b}{2\sin\varphi}$$

coordonatele punctului P și eliminînd pe φ între aceste relații, obținem ecuația locului geometric al lui P:

$$b^2x^2+a^2y^2=4x^2y^2.$$

Analog obținem ecuația locului geometric al punctului Q:

$$\frac{x^2}{\frac{c^4}{4a^2}}+\frac{y^2}{\frac{c^4}{4b^2}}-1=0. \qquad (1)$$

Deci locul geometric al punctului Q este o elipsă cu semiaxele $a_1=\frac{c^2}{2a}$, $b_1=\frac{c^2}{2b}$.

Dreapta PQ are ecuația

$$2a\cos\varphi\cdot x-2b\sin\varphi\cdot y-c^2=0.$$

Scriind această ecuație sub forma

$$\frac{2a\cos(2\pi-\varphi)}{c^2}x+\frac{2b\sin(2\pi-\varphi)}{c^2}y-1=0,$$

rezultă că această dreaptă este tangentă la elipsa (1) în punctul de coordonate

$$\frac{c^2\cos(2\pi-\varphi)}{2a},\ \frac{c^2\sin(2\pi-\varphi)}{2b}.$$

15. *Se dă o elipsă și două puncte P și P'. Prin aceste puncte se* duc coardele AB și $A'B'$ paralele și de direcție variabilă.

Să se arate că axa radicală a cercurilor având ca diametre pe AB, $A'B'$ trece printr-un punct fix.

Soluție.

Fie x_0, y_0 și x_1, y_1, coordonatele punctelor P și P' și $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ ecuația elipsei.

O secantă care trece prin punctul P de ecuație $y=y_0=m(x-x_0)$, întîlnește elipsa în două puncte A și B. Dacă notăm cu x', y' și x'', y'' coordonatele acestor două puncte, ecuația cercului descris pe AB ca diametru este

$$(x-x')(x-x'')+(y-y')(y-y'')=0$$

sau

$$x^2+y^2-x(x'+x'')-y(y'+y'')+x'x''+y'y''=0.$$

Dar, x' și x'' sînt rădăcinile ecuației obținute eliminînd pe y între ecuațiile elipsei și ale secantei, adică

$$b^2x^2+a^2(mx+y_0-mx_0)^2-a^2b^2=0$$

sau

$$(b^2+a^2m^2)x^2+2a^2m(y_0-mx_0)x+a^2(y_0-mx_0)^2-a^2b^2=0.$$

Deducem

$$x'+x''=-\frac{2a^2m(y_0-mx_0)}{b^2+a^2m^2},\quad x'x''=a^2\frac{(y_0-mx_0)^2-b^2}{b^2+a^2m^2}.$$

S-ar putea calcula $y'+y''$, și $y'y''$ formînd ecuația în y a punctelor A și B. Dar este mai simplu să observăm că $y'+y''$ și $y'y''$ se deduc

respectiv din $x'+x''$ și $x'x''$, schimbînd a în b, b în a, x_0 în y_0, y_0 în x_0 și m în $\frac{1}{m}$. Avem astfel

$$y'+y''=\frac{2b^2(y_0-mx_0)}{b^2+a^2m^2},\quad y'y''=b^2\frac{(y_0-mx_0)^2-a^2m^2}{b^2+a^2m^2}.$$

Ecuația cercului care are ca diametru AB este deci

$$x^2+y^2+\frac{2a^2m(y_0-mx_0)}{b^2+a^2m^2}x-\frac{2b^2(y_0-mx_0)}{b^2+a^2m^2}\cdot y+\frac{(a^2+b^2)(y_0-mx_0)^2-a^2b^2(m^2+1)}{b^2+a^2m^2}=0.$$

Analog, ecuația cercului care are ca diametru $A'B'$ este

$$x^2+y^2+\frac{2a^2m(y_1-mx_1)}{b^2+a^2m^2}x-\frac{2b(y_1-x_1)}{b^2+a^2m^2}y+\frac{(a^2+b^2)(y_1-mx_1)^2-a^2b^2(m^2+1)}{b^2+a^2m^2}=0.$$

Scăzînd aceste două ecuații, se obține ecuația axei radicale

$$2a^2mx-2b^2y+(a^2+b^2)(y_0-mx_0+y_1-mx_1)=0$$

sau

$$m[2a^2x-(a^2+b^2)(x_0+x_1)]-[2b^2y-(a^2+b^2)(y_0+y_1)]=0.$$

Deci, această dreaptă trece prin punctul fix

$$x=\frac{(a^2+b^2)(x_0+x_1)}{2a^2},\quad y=\frac{(a^2+b^2)(y_0+y_1)}{2b^2}.$$

16. *Se consideră o elipsă și o tangentă oarecare t într-un punct al ei. Să se demonstreze că există două cercuri care trec prin cele două focare ale elipsei și sînt tangente la dreapta t. Punctele de contact ale acestor cercuri cu dreapta t sînt pe tangentele în vîrfurile axei mici ale elipsei, iar cercurile se intersectează după un unghi constant.*

Soluție.

Considerăm figura raportată la sistemul de axe format din axele elipsei. Ecuația elipsei este deci

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Punctul de elipsă este $M\ (a\cos\varphi, b\sin\varphi)$ și tangenta t

$$(t):\ b\cos\varphi\cdot x+a\sin\varphi\cdot y-ab=0. \qquad (1)$$

Ecuația unui cerc care trece prin focarele elipsei $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ este

$$x^2+y^2-2\lambda y+c^2=0. \qquad (2)$$

Scriind că distanţa de la centrul acestui cerc $\omega\ (0, \lambda)$ la dreapta t este egală cu raza cercului, obţinem

$$\frac{|a\lambda \sin\varphi - ab|}{\sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b_2 \cos^2\varphi}} = \sqrt{\lambda^2 + c^2}$$

sau

$$b^2 \cos^2\varphi \cdot \lambda^2 + 2a^2 b \sin\varphi \cdot \lambda + c^4 \sin^2\varphi - b^4 = 0. \tag{3}$$

De aici deducem

$$\lambda = \frac{-a^2 b \sin\varphi \pm (a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)}{b\cos^2\varphi}. \tag{4}$$

Există deci două cercuri

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 - 2\lambda_1 y = 0, \\ &x^2 + y^2 - 2\lambda_2 y - c^2 = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

care trec prin F şi F' şi sînt tangente la drepta (1).

Avînd în vedere valorile λ_1 şi λ_2 date de relaţia (4), rezultă că cercurile (5) intersectează dreapta (1) în punctele $T_1\left(a\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}, b\right)$ şi $T_2\left(-a\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}, -b\right)$, care se află pe dreptele $y=b$, respectiv $y=-b$, care sînt tangentele la elipsă în vîrfurile axei mici.

Dacă notăm cu θ unghiul dintre cercurile (5), avem

$$\cos\theta = \frac{\lambda_1\lambda_2 - c^2}{\sqrt{(\lambda_1^2 - c^2)(\lambda_2^2 - c^2)}}.$$

Avînd în vedere că

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2a^2 \sin\varphi}{b\cos^2\varphi},\quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{c^4 \sin\varphi - b^4}{b^2\cos^2\varphi},$$

deducem

$$\cos\theta = \frac{a^2 - 2b^2}{a^2}.$$

Deci θ este un unghi constant.

Dacă $a = b\sqrt{2}$ rezultă $\theta = \frac{\pi}{2}$ deci cercurile (5) sînt ortogonale.

17. *Fie (E) o elipsă cu centrul în O, P un punct al ei şi P' unul din punctele în care diametrul conjugat cu OP intersectează elipsa. Notăm cu Q simetricul lui P' faţă de P. Să se afle locul geometric al lui Q cînd punctul P se mişcă pe elipsă.*

Soluție.

Ecuația elipsei (E) este

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \tag{1}$$

iar punctul P are cordonatele $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$.

Dreapta OP este deci

$$y=\frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi\cdot x, \tag{2}$$

iar diametrul conjugat cu această dreaptă are ecuația

$$y=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\varphi\cdot x.$$

Intersectînd elipsa (1) cu dreapta (2) obținem

$$P'(\pm a\sin\varphi, \mp b\cos\varphi).$$

Dacă notăm cu α, β coordonatele punctului Q' simetric cu P' față de P, avem

$$a\cos\varphi=\frac{\alpha\pm a\sin\varphi}{2},\quad b\sin\Phi=\frac{\beta\mp b\cos\varphi}{2}$$

sau

$$\alpha=a(2\cos\varphi\mp\sin\varphi),$$
$$\beta=b(2\sin\varphi\pm\cos\varphi).$$

Eliminînd pe φ între aceste ecuații obținem

$$\frac{\alpha^2}{(a\sqrt{5})^2}+\frac{\beta^2}{(a\sqrt{5})^2}-1=0$$

sau trecînd la coordonate curente

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{5})^2}+\frac{y^2}{(b\sqrt{5})^2}-1=0.$$

Deci, locul geometric al punctului Q este o elipsă omotetică cu elipsa (E), cu raportul de omotetie $\sqrt{5}$.

18. *Se consideră patrulaterul format din tangentele la o elipsă în vîrfurile aparținînd aceleiași axe și din două tangente variabile care se intersectează pe această axă. Să se determine înfășurătoarea diagonalelor acestui patrulater.*

Soluţie.

Raportăm figura la sistemul de axe determinat de axele elipsei. Astfel, aceasta are ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-1=0. \qquad (1)$$

Tangentele în vîrfurile axei orizontale au ecuaţiile

$$x=a;\ x=-a.$$

Fie $M(\alpha,\ 0)$ punctul de pe axa Ox unde se întîlnesc tangentele variabile duse la elipsa (1). Ecuaţia tangentelor duse din M la elipsă este

$$y=\pm\frac{b}{\sqrt{\alpha^2-a^2}}(x-\alpha).$$

Vîrfurile patrulaterului sînt deci

$$A\left[a,\ \frac{b(\alpha-a)}{\sqrt{\alpha^2-a^2}}\right],\ B\left[a,-\frac{b(\alpha-a)}{\sqrt{\alpha^2-a^2}}\right],\ C\left[-a,-\frac{b(\alpha+a)}{\sqrt{\alpha^2+a^2}}\right],$$

$$D\left[-a,\ \frac{b(\alpha+a)}{\sqrt{\alpha^2-a^2}}\right].$$

Diagonalele AC şi BD au ecuaţiile

$$(AC):\ b\alpha x-a\sqrt{\alpha^2-a^2}y-a^2b=0,$$

$$(BD):\ b\alpha x-a\sqrt{\alpha^2-a^2}y-a^2b=0.$$

Deci, ecuaţia comună a acestor două diagonale este

$$F(x,y,\alpha)=b^2(\alpha x-a^2)^2-a^2(\alpha-a^2)y^2=0.$$

Înfăşurătoarea diagonalelor AC şi BD se obţine eliminînd parametrul α între ecuaţiile

$$F(x,y,\alpha)=0,\qquad F'_\alpha(x,y,\alpha)=0.$$

Obţinem astfel ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Dacă ducem tangentele fixe în vîrfurile celeilalte axe a elipsei, obţinem ca înfăşurătoare hiperbola conjugată cu aceasta

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

19. *Considerăm un cerc (O) în plan şi un punct A exterior lui. Fie AT_1 şi AT_2 tangentele duse din A la cerc şi (d) o dreaptă oarecare dusă prin A, care întîlneşte diametrul cercului perpendicular pe OA în C şi tangentele paralele cu acest diametru în B şi D. Notînd cu (Γ) hiperbola cu centrul în C, cu axa OC, ale cărei asimptote sînt paralele cu AT_1 şi AT_2 şi care trece prin B, să se arate că cercul (O) este bitangent la hiperbola (Γ).*

Soluție.

Raportăm figura la sistemul de coordonate format din dreptele OA și OC. Notînd cu R raza cercului (O) și cu a ordonata lui C. O tangentă oarecare la cercul (O) are ecuația

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - R = 0. \tag{1}$$

Scriind că această dreaptă întîlnește axa Ox în A, obținem coordonatele acestui punct, $A\left(\frac{R}{\cos\varphi}, 0\right)$. Deci, cealaltă tangentă dusă din A la cerc are ecuația

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - R = 0. \tag{2}$$

Asimptotele hiperbolei (Γ) sînt deci dreptele paralele cu (1) și (2) duse prin punctul $C(0, a)$, deci

$$x\cos\varphi + (y-a)\sin\varphi = 0,$$

$$x\cos\varphi - (y-a)\sin\varphi = 0.$$

Ecuația hiperbolei (Γ) este deci

$$x^2\cos^2\varphi - (y-a)^2\sin^2\varphi = \alpha. \tag{3}$$

Dreapta AC are ecuația

$$\frac{\cos\varphi}{R}x + \frac{y}{a} - 1 = 0,$$

deci întîlnește tangenta la cerc paralelă cu Oy în punctul $B[R, a(1-\cos\varphi)]$.

Scriind că hiperbola (3) trece prin punctul B, obținem

$$\alpha = (R^2 - a^2\sin^2\varphi)\cos^2\varphi.$$

Deci, hiperbola (Γ) are ecuația

$$x^2\cos^2\varphi - (y-a)^2\sin^2\varphi = (R^2 - a^2\sin^2\varphi)\cos^2\varphi.$$

Scriind această ecuație sub forma

$$(x^2+y^2-R^2)\cos^2\varphi - (y - a\sin^2\varphi)^2 = 0,$$

rezultă că cercul (O) este bitangent hiperbolei (Γ) în punctele de intersecție cu dreapta $y = a\sin^2\varphi$.

20. *Să se găsească locul geometric al vîrfurilor hiperbolelor care trec printr-un punct dat și pentru care una din asimptote este o dreaptă dată, iar cealaltă este o paralelă la o direcție dată.*

Soluție.

Ducem prin punctul dat O paralelele la asimptote și luăm ca axe bisectoarele unghiului format. Fie

$$y = mx + b,\quad y = -mx - \lambda$$

ecuațiile celor două asimptote. Ecuația conicei având aceste drepte ca asimptote și trecînd prin origine este

$$(y-mx-b)(y+mx+\lambda)=b\lambda$$

sau

$$y^2-m^2x^2-b(y+mx)+\lambda(y-mx)=0. \qquad (1)$$

Axele hiperbolei sînt paralele la Ox, Oy duse prin centrul hiperbolei și locul geometric al vîrfurilor se obține eliminînd pe λ între ecuația (1) și una dintre ecuațiile care determină centrul

$$2y-b+\lambda=0,\ 2mx+b+\lambda=0.$$

Se găsesc ecuațiile

$$(y-mx)^2+2bmx+0,$$
$$(y-mx)^2-2by=0.$$

Ele reprezintă două parabole tangente în origine, la Qx sau la Oy. avînd axa paralelă la asimptota fixă AB și intersectîndu-se în mijlocul lui AB.

21. *Se consideră, față de un sistem de coordonate carteziene ortogonale xOy, o parabolă (γ) de ecuații parametrice*

$$x=2p\lambda^2,\quad y=2p\lambda.$$

Dintr-un punct $A(\alpha, \beta)$ se duc tangentele AT_1 și AT_2 la parabola (γ) și se cere:

1° Să se formeze, în funcție de α și β, ecuația care dă valorile λ_1 și λ_2 ale parametrilor punctelor T_1 și T_2.

2° Notînd cu φ_1, φ_2 unghiurile pe care axa Ox le face cu dreptele AT_1, AT_2, să se arate că locul geometric al punctelor A pentru care $\varphi_1+\varphi_2=\varphi$ (const) este o dreaptă (Δ).

3° Cînd φ variază dreapta (Δ) trece printr-un punct fix,

4° Notînd cu B al patrulea vîrf al paralelogramului cu laturile AT_1 și AT_2, să se afle locul geometric (Γ) al punctului B cînd φ este constant. Să se arate că, dacă φ variază, curba (Γ) trece printr-un punct fix.

5° Dreapta (Δ) intersectează parabola (γ) în punctele C_1 și C_2. Să se arate că tangentele în C_1 și C_2 la parabolă sînt perpendiculare.

Soluție.

1° Notînd cu λ_1, λ_2 parametrii punctelor T_1, T_2, avem $T_1(2p\lambda_1^2, 2p\lambda_1)$, $T_2(2p\lambda_2^2, 2p\lambda_2)$. Tangentele în T_1 și T_2 la parabola (γ) au ecuațiile

$$(t_1):\ x-2\lambda_1 y+2p\lambda_1^2=0,$$
$$(t_2):\ x-2\lambda_2 y+2p\lambda_2^2=0. \qquad (1)$$

Scriind că aceste drepte trec prin punctul A, obținem

$$2p\lambda_1^2 - 2\beta\lambda_1 + \alpha = 0,$$
$$2p\lambda_2^2 - 2\beta\lambda_2 + \alpha = 0.$$

deci ecuația care ne dă valori parametrilor λ_1 și λ_2 este

$$2p\lambda^2 - 2\beta\lambda + \alpha = 0. \tag{2}$$

2° Din ecuațiile (1) rezultă că

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{1}{2\lambda_1}, \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{1}{2\lambda_2}.$$

Deci, avem

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2}{1 - \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{2(\lambda_1 + \lambda_2)}{4\lambda_1\lambda_2 - 1},$$

și avînd în vedere ecuația (2), rezultă

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta}{2\alpha - p}. \tag{3}$$

Deci, dacă $\varphi = \text{const}$, locul geometric al punctului A este dreapta

$$(\Delta): \; y = \operatorname{tg}\varphi\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

3° Cînd φ variază dreapta (Δ) trece prin punctul fix $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, deci prin focarul parabolei (γ).

4°. Ecuațiile dreptelor BT_1 și BT_2 sînt

$$(BT_1): \; x - 2\lambda_2 y + 4p\lambda_1\lambda_2 - 2p\lambda_1^2 = 0,$$
$$(BT_2): \; x - 2\lambda_1 y + 4p\lambda_1\lambda_2 - 2p\lambda_2^2 = 0,$$

unde λ_1 și λ_2 sînt rădăcinile ecuației (2). Aceste drepte se intersectează în punctul B de coordonate

$$x = \frac{2\beta^2 - 3p\alpha}{p}, \quad y = \beta.$$

Eliminînd între aceste relații și ecuația (3) pe α și β, obținem ecuația locului geometric al punctului B, cînd φ este constant:

$$(\Gamma): \; 2y^2 - px - 6p \operatorname{cotg}\varphi \cdot y - 6p^2 = 0.$$

Cînd φ variază, curbele (Γ), care sînt parabole, trec prin punctele fix $M(-6p, 0)$.

5° Dreapta (Δ) intersectează parabola (γ) în punctele

$$C_1\left(\frac{p\operatorname{cotg}^2\frac{\varphi}{2}}{2}, \; p\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\right), \quad C_2\left(\frac{p\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{2}, \; -p\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right).$$

Tangentele în aceste puncte la parabola (γ) au ecuațiile

$$x=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cdot x+\frac{p\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}}{2},$$

$$y=\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\cdot x-\frac{p\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{2},$$

deci sînt perpendiculare.

22. *Să se găsească locul geometric al unei coarde de lungime constantă înscrisă într-o parabolă.*

Soluție.

Fie $y^2-2px=0$ ecuația parabolei și fie $x=my+n$ ecuația unei drepte care întîlnește curba în două puncte M_1 și M_2, astfel ca distanța M_1M_2 să fie egală cu o constantă dată l.

Ordonatele y' și y'' ale punctelor M_1 și M_2 sînt rădăcinile ecuației

$$y^2-2pmy-2pn=0,$$

iar abscisele corespunzătoare x' și x'' sînt

$$x'=my'+n,\quad x''=my''+n.$$

Trebuie să avem

$$(x'-x'')^2+(y'-y'')^2=l^2,$$

sau

$$(1+m^2)(y'-y'')^2=l^2.$$

Pe de altă parte avem

$$(y'-y'')^2=(y'+y'')^2-4y'y''=4p^2m^2+8pn.$$

Deci.

$$4p(1+m^2)\ (pm^2+2n)=l^2. \tag{1}$$

Mijlocul M al coardei M_1M_2 este la intersecția acestei coarde cu diametrul său conjugat. Prin urmare, coordonatele punctului M sînt definite de ecuațiile

$$x=my+n,\quad y=pm. \tag{2}$$

Locul geometric al acestui punct se obține eleminînd pe m și n între ecuațiile (1) și (2).

Din ecuațiile (2) scoatem $m=\frac{y}{p}$, $n=x-\frac{y^2}{p}$, și înlocuind aceste valori cu (1) găsim ecuația locului geometric

$$x=\frac{1}{8p}\left(4y^2+\frac{p^2l^2}{y^2+p^2}\right).$$

23. *Să se găsească ecuația generală a parabolelor* (Γ) *tangente la Ox și Oy.*

Soluție.

Fie

$$Y^2 - 2pX = 0 \tag{1}$$

ecuația parabolei (Γ) raportată la axa ωX și la tangentă în vîrf cu Y, ω fiind vîrful parabolei. Fie (a,b) coordonatele lui ω în raport cu xOy și fie $\varphi = (Ox, \omega X)$. Formulele de trecere de la axele xOy la $X\omega Y$ și invers sînt

$$x = a + X\cos\varphi - Y\sin\varphi, \quad y = b + X\sin\varphi + Y\cos\varphi, \tag{2}$$

$$X = (x-a)\cos\varphi + (y-b)\sin\varphi, \quad Y = -(x-a)\sin\varphi + (y-b)\cos\varphi. \tag{3}$$

în particular, dacă anulăm pe x și y în formulele (2) se obțin ecuațiile axelor Ox și Oy în raport cu ωXY

$$X\sin\varphi + Y\cos\varphi + b = 0, \quad X\cos\varphi - Y\sin\varphi + a = 0.$$

Înlocuind coeficienții acestor ecuații prin ecuația tangențială a parabolei (1), obținem

$$a = \frac{p\sin^2\varphi}{2\cos\varphi}, \quad b = \frac{p\cos^2\varphi}{2\sin\varphi}.$$

Înlocuind aceste valori în (3), rezultă

$$X = x\cos\varphi + y\sin\varphi - \frac{p}{2}, \quad Y = -\sin\varphi + y\cos\varphi - p\operatorname{ctg} 2\varphi,$$

care, ținînd seama (1), ne dau

$$(x\sin\varphi - y\cos\varphi + p\operatorname{ctg} 2\varphi)^2 - 2p\left(x\cos\varphi + y\sin\varphi - \frac{p}{2}\right) = 0.$$

Aceasta este ecuația generală a parabolelor tangente la axele de coordonate.

24. Să se găsească locul geometric al centrului de greutate al unui triunghi echilateral ale cărui laturi sînt normale la o parabolă.

Soluție.

Notînd $\operatorname{tg}\varphi = \lambda$ și $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{3} = m$ obținem relația

$$\lambda = \frac{3m - m^3}{1 - 3m^2}.$$

sau

$$m^2 - 3\lambda m - 3m + \lambda = 0.$$

Această ecuație de gradul al treilea admite ca rădăcini coeficienții unghiulari ai laturilor unui triunghi echilateral, axele de coordonate fiind

presupuse ortogonale. Dacă notăm cu m_1, m_2, m_3 cele trei rădăcini, avem

$$\Sigma m_i = 3\lambda,\ \Sigma m_i m_j = -3,\ m_1 m_2 m_3 = -\lambda. \qquad (1)$$

Să considerăm acum trei normale la parabola $y^2 - 2px = 0$, paralele cu aceste direcţii, de ecuaţii

$$y = m_1(x-p) - \frac{pm_1^2}{2},$$

$$y = m_2(x-p) - \frac{pm_2^3}{2},$$

$$y = m_3(x-p) - \frac{pm_3^2}{2}.$$

Din primele două ecuaţii rezultă

$$x = p + \frac{p}{2}(m_1^2 + m_1m_2 + m_2^2),\ y = \frac{p}{2} m_1m_2(m_1 + m_2),$$

adică coordonatele unuia dintre vîrfurile triunghiului echilateral format de cele trei normale. Celelalte se obţin prin permutarea indicilor.

Coordonatele X, Y ale centrului de greutate al triunghiului sînt

$$3X = 3p + \frac{p}{2}(2\Sigma m_1^2 + \Sigma m_1m_2) =$$

$$= 3p + \frac{p}{2}[2(\Sigma m_1)^2 - 3\Sigma m_1m_2],$$

sau, ţinînd seama de relaţia (1), rezultă

$$X = \frac{5}{2} p + 3p\lambda^2.$$

In mod analog, $Y = -p\lambda$.

Deci, locul geometric este parabola

$$3Y^2 - pX + \frac{5}{2} p^2 = 0.$$

25. *Se consideră două parabole* (Γ_1) *şi* (Γ_2) *care au aceeaşi axă şi acelaşi parametru p, parabola* (Γ_1) *fiind interioară parabolei* (Γ_2).

Fie P un punct oarecare al parabolei (Γ_1) *şi t tangenta la parabolă în P, care intersectează parabola* (Γ_2) *în punctele A şi B.*

Să se demonstreze că, dacă P variază pe (Γ_1), *diferenţa distanţelor punctelor A şi B la axa parabolelor este constantă.*

Soluţie.

Raportăm figura la sistemul format din axa parabolelor ca axă Ox şi din tangenta în vîrful parabolei (Γ_2) ca axă Oy.

Ecuaţiile celor două parabole sînt

$$(\Gamma_1): y^2 = 2px - k^2;\ (\Gamma_2): y^2 = 2px.$$

Un punct oarecare P de pe (Γ_1) are coordonatele

$$x=\frac{\alpha^2+k^2}{2p},\quad y=\lambda.$$

Tangenta în P la parabola (Γ_1) are ecuația

$$(t): px-\alpha y+\frac{\alpha^2-k^2}{2}=0.$$

Pentru a găsi coordonatele punctelor A și B trebuie să rezolvăm sistemul

$$y^2-2px=0,\ 2px-2\alpha y+\alpha^2-k^2=0.$$

Eliminînd pe x între aceste două ecuații, obținem

$$y^2-2\alpha y+\alpha^2-k^2=0,$$

ecuația care are drept rădăcină ordonatele punctelor A și B, adică distanțele de la aceste puncte la axa parabolelor. Dacă notăm aceste distanțe cu y_1 și y_2, avem

$$y_{1,2}=\alpha\pm k.$$

Deci,

$$y_1-y_2=2k,$$

adică diferența distanțelor de la A și B la axa parabolelor este constantă.

26. *Să se arate că dacă un triunghi este circumscris unei parabole, punctul de intersecție al înălțimilor este situat pe directoare.*

Soluție.

Tangenta la parabola $y^2-2px=0$ în punctul (x_1, y_1) are ecuația

$$yy_1-p(x+x_1)=0,$$

sau înlocuind pe x_1 prin $\frac{y_1^2}{2p}$ avem

$$2px-2yy_1+y_1^2=0.$$

Să considerăm trei tangente la parabolă, de ecuații

$$(d_1): 2px-2yy_1+y_1^2=0,$$
$$(d_2): 2px-2yy_2+y_2^2=0,$$
$$(d_3): 2px-2yy_3+y_3^2=0,$$

care formează un triunghi circumscris parabolei.

Înălțimea coborîtă din punctul de întîlnire al laturilor $d_2=0$, $d_3=0$ are o ecuație de forma $d_2+\lambda d_3=0$. Să determinăm pe λ scriind că această dreaptă este perpendiculară pe dreapta $d_1=0$. Obținem

$$\lambda=-\frac{p^2+y_1y_2}{p^2+y_1y_3}.$$

Ecuaţia înălţimii este deci

$$d_2 - \frac{p^2 + y_1 y_2}{p^2 + y_1 y_3} d_3 = 0,$$

sau

$$(p^2 + y_1 y_3)(2px - 2yy_2 + y_2^2) - (p^2 + y_1 y_2)(2px - 2yy_3 + y_3^2) = 0,$$

sau

$$2py_1 x + 2p^2 y - p^2(y_2 + y_1) - y_1 y_2 y_3 = 0. \qquad (1)$$

Analog găsim ecuaţia înălţimii coborîte din punctul de întîlnire al dreptelor $d_1 = 0$ şi $d_3 = 0$ pe dreapta $d_2 = 0$,

$$2py_2 x + 2p^2 y - p^2(y_1 + y_3) - y_1 y_2 y_3 = 0. \qquad (2)$$

Rezolvînd sistemul format din ecuaţiile (1) şi (2), obţinem

$$x = -\frac{p}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{2} + \frac{y_1 y_2 y_3}{2p^2}.$$

Deci, ortocentrul triunghiului este situat pe directoarea de ecuaţie $x + \frac{p}{2} = 0$.

27. *Se dau două parabole cu axele ortogonale. Să se demonstreze că baricentrul celor două puncte comune este punctul de intersecţie al axelor parabolelor.*

Soluţie.

Ecuaţiile

$$y^2 = h(x + a), \quad x^2 = k(y + b) \qquad (1)$$

reprezintă două parabole cu axele ortogonale al căror punct de intersecţie este originea. Dacă $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, $P_4(x_4, y_4)$, sînt cele patru puncte de intersecţie a celor două curbe, coordonatele baricentrului lor sînt

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}.$$

Eliminînd y între ecuaţiile (1), se obţine

$$x^4 - 2bkx^2 - k^2 hx + k^2(b^2 - ah) = 0,$$

care ne dă abscisele celor patru puncte. Neţinînd seama de termenul de gradul al treilea se deduce că

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

şi deci

$$x = 0.$$

În mod analog, eliminînd pe x se deduce că

$$y_1+y_2+y_3+y_4=0,$$

de unde

$$y=0.$$

Deci, baricentrul punctelor P_i, $(i=1, 2, 3, 4)$ este originea, adică intersecția axelor parabolelor.

28. *Din punctul P al planului unei parabole se coboară cele trei normale avînd picioarele A, B, C. Fie A', B', C' celelalte puncte de întîlnire ale acestor normale cu parabola. Cercurile cu diametre PA', PB' PC' determină pe BC, CA, AB perechi de puncte α, α_1 β, β_1 γ, γ_1. Dreptele $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ sînt tangente la parabolă.*

Dreptele $A'\alpha_1$, $B'\beta_1$, $C'\gamma_1$, sînt diametrele curbei în aceste puncte.

Soluție.

Proprietatea enunțată pentru una din normale se va extinde prin simetrie asupra celorlalte. Este deci suficient să o verificăm de exemplu pentru normala APA'. Este inutil de a introduce cercul cu diametrul PA'; este deajuns să demonstrăm că unghiurile $P\alpha A'$ și $P\alpha_1 A'$ sînt drepte.

Fie $P(\xi, \eta)$ și parabola $y^2=2px$. Un punct oarecare de pe parabolă este $M\left(\frac{\lambda^2}{2p}, \lambda\right)$. Tangenta în M la parabolă are coeficientul unghiular $m=\frac{p}{\lambda}$, iar dreapta MP, coeficientul unghiular $m'=\frac{2p(\lambda-\eta)}{\lambda^2-2p\xi}$. Pentru ca MP să fie normală la parabolă trebuie ca $mm'=-1$, adică

$$\frac{2p^2(\lambda-\eta)}{\lambda(\lambda^2-2p\xi)}=-1.$$

De aici rezultă

$$\lambda^3+2p(p+\xi)\lambda-2p^2\eta=0.$$

Dacă punctele B și C au ordonatele $-b$ și $-c$, atunci A are ordonata $b+c$. Scriind la această ecuație relațiile între rădăcini și coeficienți, deducem

$$\xi=\frac{2p^2+b^2+c^2+bc}{2p},\ \eta=\frac{bc(b+c)}{2p^2}. \tag{1}$$

Ordonatele punctelor A', B', C' sînt

$$y_{B'}=\frac{2p^2+b^2}{b},\ y_{C'}=\frac{2p^2+c}{c},\ y_{A'}=\frac{2p^2+(b+c^2)}{b+c} \tag{2}$$

Ecuația dreptei BC este

$$2px+(b+c)y+bc=0. \tag{3}$$

Tangenta la parabolă în punctul A' are ecuaţia

$$yy_{A'}=px+\frac{y_{A'}^2}{2} \tag{4}$$

Rezolvînd ecuaţiile (3) şi (4) se obţin coordonatele punctului α. Rămîne să demonstrăm că $P\alpha$ este perpendiculară pe tangenta $A'\alpha$. Dacă rezolvăm sistemul format din (3) şi din (4) scrisă sub forma

$$px+\frac{2p^2+(b+c)^2}{b+c}\,y+\frac{[2p^2+(b+c)^2]^2}{(b+c)^2}=0,$$

găsim pentru coordonatele lui α

$$\begin{aligned} x&=\frac{2p^2+(b+c)^2\ \ (2p^2+b^2+c^2)}{2p\,[4p^2+(b+c)^2]}\cdot\\ y&=-\frac{[2p^2+(b+c)^2]-bc\ (b+c)^2}{(b+c)\,[4p^2+(b+c)^2]}\cdot \end{aligned} \tag{5}$$

Coeficientul unghiular a lui $\alpha A'$ este

$$\mu=-\frac{p\,(b+c)}{2\,p^2+(b+c)^2}\cdot \tag{6}$$

Printr-un calcul simplu se obţine coeficientul unghiular al dreptei $P\alpha$

$$\mu'=\frac{2\,p^2+(b+c)^2}{p\,(b+c)} \tag{7}$$

Din (6) şi (7) obţinem $\mu\,\mu'=-1$. Unghiul $P\alpha P'$ este deci drept.

Dacă $A'\alpha_1$ este un diametru al parabolei se obţine pentru ordonata lui α_1.

$$y_1=y_{A'}=-\frac{2p^2+(b+c)^2}{b+c} \tag{8}$$

Abscisa punctului de întîlnire a lui $A'\alpha$ cu BC este

$$x_{\alpha_1}=\frac{2\,p^2+b^2+c^2+bc}{2p}=\xi\cdot \tag{9}$$

Prin urmare, P_1 este perpendicular pe $A'c$. Punctul α_1 este deci pe cercul de diametrul PA'.

29. *Fie (Γ) o conică nedegenerată, T_i ($i=1,\ 2,\ 3$) trei puncte pe ea şi t_i tangentele la conică duse în punctele T_i.*

Să se calculeze raportul dintre aria triunghiului $T_1\,T_2\,T_3$ şi aria triunghiul format de dreptele $t_1,\ t_2,\ t_3$; să se arate că acest raport este constant numai dacă conica (Γ) este o parabolă, în care caz această constantă nu depinde de forma parabolei.

Soluție.

Vom considera întîi cazul în care conica (Γ) este o parabolă de ecuație

$$y^2=2px.$$

Cele trei puncte sînt $T_i\,(2p\alpha_i^2,\ 2p\,\alpha_i)$, iar tangentele t_i au ecuațiile

$$(t_i):2\,\alpha_i y=x+2p\alpha_i^2$$

Notînd cu P_{ij} punctul de intersecție al dreptelor t_i, t_j, avem

$$P_{ij}\,[2p\alpha_i\ \alpha_j,\ p(\alpha_i+\alpha_j)]\,.$$

Deci, notînd prin $S(T)$ aria triunghiului $T_1T_2T_3$ și prin $S(t)$ aria triunghiului determinat de dreptele t_1, t_2, t_3, avem

$$S(T)=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2p\alpha_1^2 & 2p\alpha_1 & 1\\ 2p\alpha_2^2 & 2p\alpha_2 & 1\\ 2p\alpha_3^2 & 2p\alpha_3 & 1\end{vmatrix}=2p_1^2|(\alpha_1-\alpha_2)\ (\alpha_2-\alpha_3)\ (\alpha_3-\alpha_1)|,$$

$$S(t)=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2p\alpha_1\alpha_2 & p(\alpha_1+\alpha_2) & 1\\ 2p\alpha_2\alpha_3 & p(\alpha_2+\alpha_3) & 1\\ 2p\alpha_1\alpha_3 & p(\alpha_1+\alpha_3) & 1\end{vmatrix}=p^2|(\alpha_1-\alpha_2)\ (\alpha_2-\alpha_3)\ (\alpha_3-\alpha_4)|.$$

Deci,

$$\frac{S(T)}{S(t)}=2.$$

Rezultă că în cazul în care conica (Γ) este o parabolă, raportul căutat este o constantă care nu depinde de forma parabolei.

Vom considera acum cazul în care conica (Γ) este o elipsă de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Cele trei puncte sînt $T_i\,(a\,\cos\theta_i,\ b\,\sin\theta_i)$, iar tangentele t_i au ecuațiile

$$(t_i):\frac{\cos\theta_i}{a}\,x+\frac{\sin\theta_i}{b}\,y-1=0.$$

Punctul P_{ij} de intersecție al dreptelor t_i și t_j are coordonatele

$$P_{ij}\left(\frac{a\,\cos\frac{\theta_i+\theta_j}{2}}{\cos\frac{\theta_i-\theta_j}{2}},\ \frac{b\,\sin\frac{\theta_i+\theta_j}{2}}{\cos\frac{\theta_i-\theta_j}{2}}\right)$$

Prin urmare

$$\begin{vmatrix} a\cos\theta_1 & b\sin\theta_1 & 1 \\ a\cos\theta_2 & b\sin\theta_2 & 1 \\ a\cos\theta_3 & b\sin\theta_3 & 1 \end{vmatrix} = 2ab \left| \sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2} \sin\frac{\theta_2-\theta_3}{2} \sin\frac{\theta_3-\theta_1}{2} \right|$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} & \dfrac{b\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} & 1 \\ \dfrac{a\cos\frac{\theta_2+\theta_3}{2}}{\cos\frac{\theta_2-\theta_3}{2}} & \dfrac{b\sin\frac{\theta_2+\theta_3}{2}}{\cos\frac{\theta_2-\theta_3}{2}} & 1 \\ \dfrac{a\cos\frac{\theta_3+\theta_1}{2}}{\cos\frac{\theta_3-\theta_1}{2}} & \dfrac{b\sin\frac{\theta_3+\theta_1}{2}}{\cos\frac{\theta_3-\theta_1}{2}} & 1 \end{vmatrix} = \frac{S(T)}{\left|\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\right|}$$

Deci,

$$\frac{S(T)}{S(t)} = \left|\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\right|$$

și acest raport variază o dată cu cele trei puncte T_i.

In cazul hiperbolei

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

cele trei puncte sînt $T_1\left(\frac{a}{\cos\theta_i}, b\ \mathrm{tg}\ i\right)$.

Printr-un calcul analog cu cel făcut la elipsă obținem

$$\frac{S(T)}{S(t)} = \frac{\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_3+\theta_1}{2}}{\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3}$$

Rezultă că și în cazul hiperbolei raportul variază o dată cu cele trei puncte.

Capitolul VI

Teoria generală a conicelor

Curbele date de o ecuație de gradul al doilea în variabilele x, y se numesc conice.

Ecuația generală a conicelor este deci

$$f(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \qquad (1)$$

sau, în coordonatele omogene x_1, x_2, x_3,

$$f(x_1x_2x_3)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0. \qquad (1')$$

Invarianții conicei (1) față de o transformare ortogonală de coordonate sînt

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad I=a_{11}+a_{22}.$$

Tabloul general de discuție al conicei (1) este

	Conice nedegenerate $\Delta\neq 0$	Conice degenerate $\Delta=0$
$\delta>0$	$I\Delta>0$ Elipsă imaginară	Două drepte concurente imaginare cu intersecția reală
	$I\Delta<0$ Elipsă reală	
$\delta<0$	Hiperbolă	Două drepte concurente reale
$\delta=0$	Parabolă	$\delta_1<0$ Două drepte paralele distincte
		$\delta_1=0$ Două drepte paralele confundate
		$\delta_1>0$ Două drepte paralele imaginare

Unde am notat

$$\delta_1=a_{11}\ a_{33}-a_{13}^2.$$

În cazul în care $\delta \neq 0$, conica (1) are un centru ale cărui coordonate sînt soluția sistemului

$$\begin{cases} f_1 = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ f_2 = a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Axele conicei fac cu axa Ox unghiurile φ_1, φ_2, date de ecuația

$$a_{12}tg^2\varphi + (a_{11} - a_{22})tg\varphi - a_{12} = 0. \tag{3}$$

Cu valorile x_0, y_0, φ determinate de ecuațiile (2), (3) prin transformarea ortogonală de coordonate

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + x_0, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + y_0, \end{cases}$$

conica (1) devine

$$S_1x'^2 + S_2y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

unde S_1 și S_2 sînt rădăcinile ecuației în S (ecuația secular)

$$\begin{vmatrix} a_{11} - S & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - S \end{vmatrix} = 0.$$

Ecuația axelor conice este

$$a_{12}(f_1^2 - f_2^2) + (a_{11} - a_{12})f_1f_2 = 0.$$

În cazul în care $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$, făcînd transformarea de coordonate

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\rho\sqrt{a_{11}}}(a_{12}x - a_{11}y) + \dfrac{\rho^2a_{33} + a_{23}'^2}{2\rho^2a_{13}'}, \\ y' = \dfrac{1}{\rho\sqrt{a_{11}}}(a_{11}x + a_{12}y) + \dfrac{a_{23}'}{\rho^2}, \end{cases}$$

unde am notat

$$\rho = \sqrt{\frac{a_{11}^2 + a_{12}^2}{a_{11}}}, \quad a_{13}' = \frac{a_{12}a_{13} - a_{13}a_{23}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}, \quad a_{23}' = \frac{a_{11}a_{12} + a_{12}a_{23}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}},$$

ecuația conicei devine

$$y'^2 = 2\,px', \quad \left(p^2 = -\frac{\Delta}{I^3}\right).$$

Axa parabolei are ecuația

$$a_{11}f_1 + a_{12}f_2 = 0.$$

Scriind ecuația (1) sub forma

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=k(ax+by+c)^2,$$

punctul $F(\alpha,\beta)$ este un focar al conicei, iar dreapta

$$ax+by+c=0$$

este directoarea corespunzătoare acestui focar.

Cele două focare se mai pot determina și ca soluții ale sistemului

$$\begin{cases} f_1^2(\alpha,\beta)-f_2^2(\alpha,\beta)-(a_{11}-a_{22})f(\alpha,\beta)=0, \\ f_1(\alpha,\beta)f_2(\alpha,\beta)-a_{12}f(\alpha,\beta)=0. \end{cases}$$

Asimptotele conicei (1) sînt date de ecuația

$$\delta f(x,y)-\Delta=0.$$

Ecuația tangentelor duse din punctul $P(x'_1, x'_2, x'_3)$ la conica (1') este

$$[f(x';x)]^2-f(x_1, x_2, x_3)f(x'_1, x'_2, x'_3)=0,$$

unde $f(x';x)$ este forma dedublată (polară) a ecuației (1'),

$$f(x';x)=a_{11}x'_1x_1+a_{12}(x'_1x_2+x'_2x_1)+a_{22}x'_2x_2+a_{13}(x'_1x_3+x'_3x_1)+$$
$$+a_{23}(x'_2x_3+x'_3x_2)+a_{33}x'_3x_3.$$

Ecuația polarei punctului P față de conica (1') este

$$f(x';x)=0.$$

Diametrul conjugat cu direcția m are ecuația

$$f_1+mf_2=0$$

Ecuația tangențială a conicei (1) este

$$A_{11}U^2+2A_{12}UV+A_{22}V^2+2A_{13}UW+2A_{23}VW+A_{33}W^2=0,$$

unde A este complementul algebric al elementului aij din determinantul Δ.

Dacă $f(x, y)=0$, $g(x, y)=0$ sînt ecuațiile a două conice, ecuația

$$f(x, y)+\lambda g(x, y)=0$$

reprezintă fasciculul de conice care trec prin punctele de intersecție ale conicelor date.

Ecuația fasciculului circumscris patrulaterului ale cărui laturi au ecuațiile $d_i=0$ $(i=1, 2, 3, 4)$ este

$$d_1d_2+\lambda\, d_3d_4=0.$$

Ecuația fasciculului de conice tangente în punctele A și B la dreptele $d_1=0$, $d_2=0$ este

$$d_1d_2+\lambda\, d^2=0,$$

unde $d=0$ este ecuația dreptei AB. Acest fascicul se numește fascicul bitangent de conice.

Ecuația fasciculului de conice bitangente conicei de ecuație $F(x, y)=0$ în punctele A și B este

$$F(x, y)+\lambda d^2=0,$$

unde $d=0$ este ecuația dreptei AB.

Probleme

1. Să se reducă la forma canonică ecuația conicei

$$2x^2-6xy+10y^2-8x+12y+2=0$$

T. Lalescu

Soluție.

Invarianții ortogonali ai conicei au valorile

$$\delta=11,\ \Delta=-66.$$

Deci, conica este o elipsă (fig. 10). Coordonatele centrului sînt date de sistemul.

$$2x_0-3y_0-4=0,\quad -3x_0+11y_0+6=0,$$

adică centrul elipsei are coordonatele $x_0=2$, $y_0=0$.

Unghiul de rotație este dat de ecuația

$$3\operatorname{tg}^2\varphi+8\operatorname{tg}\varphi-3=0.$$

De aici deducem

$$\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{10}};\quad \sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

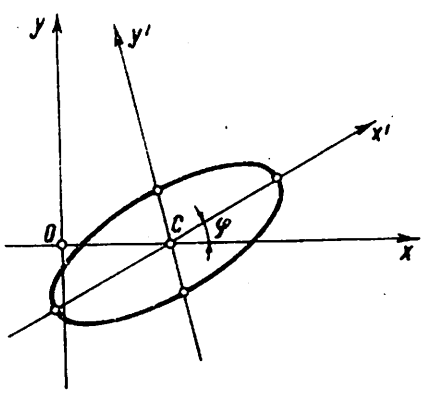


Figura 10

Schimbarea de axe este definită deci de ecuațiile

$$x=\frac{3}{\sqrt{10}}x'-\frac{1}{\sqrt{10}}y'+2,\ y=\frac{1}{\sqrt{10}}x'+\frac{3}{\sqrt{10}}y' \qquad (1)$$

Ecuația seculară este

$$S^2-12S+11=0,$$

avînd rădăcinile $S_1=11$, $S_2=1$.

Deci, prin transformarea (1) ecuația conicei devine

$$\frac{x'^2}{6}+\frac{y'^2}{\frac{6}{11}}-1=0.$$

Axele elipsei au ecuațiile $y'=0$, respectiv $x'=0$, adică

$$x-3y-2=0,\quad 3x+y-6=0.$$

2. Să se reducă la forma canonică ecuația conicei

$$7x^2-8xy+y^2-6x+6y+1=0.$$

T. Lalescu

Soluție.

Invarianții ortogonali ai conicei sînt

$$\delta=-9,\quad \Delta=-9,$$

deci este o hiperbolă (fig. 11).

Coordonatele centrului sînt date de sistemul

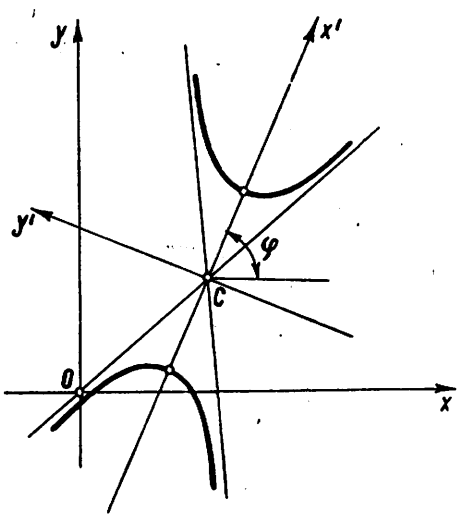


Figura 11

$$7x_0-4y_0-3=0,\quad -4x_0+y_0+3=0,$$

adică sînt $x_0=y_0=1$. Unghiul de rotație este dat de ecuația

$$4\operatorname{tg}^2\varphi-6\operatorname{tg}-4=0.$$

De aici deducem

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Schimbarea de axe este definită de formulele

$$x=\frac{1}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'+1,$$

$$y=\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'+1. \qquad (1)$$

Ecuația în S este

$$S^2-8S-9=0.$$

avînd rădăcinile $S_1=9$, $S_2=-1$.

Deci, prin transformarea (1) ecuația hiperbolei devine

$$x'^2-\frac{y'^2}{\frac{1}{9}}-1=0.$$

Axele elipsei au ecuațiile $y'=0$, respectiv $x'=0$, adică

$$2x-y-1=0,\quad x+2y-3=0.$$

3. Să se reducă la forma canonică conica de ecuație

$$9x^2-24xy+16x^2-20x+110y-50=0.$$

Kletenik

Soluție.

Calculînd invarianții δ și Δ, avem

$$\delta=0,\ \Delta=-25^3,$$

deci conica este o parabolă (fig. 12).

Ecuația ei se scrie

$$(3x-4y)^2-20x+110y-50=0. \tag{1}$$

Vom face rotația definită de formulele

$$\begin{cases} x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi, \\ y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi, \end{cases}$$

unde φ este dată de relațiile

$$\rho\sin\varphi=-\sqrt{a_{11}};\ \rho\cos\varphi=\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}},$$

adică

$$\rho\sin\varphi=-3,\ \rho\cos\varphi=-4.$$

De aici deducem

$$\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{5},\ \rho\cos\varphi=-\frac{4}{5},$$

deci rotația este

$$\begin{cases} x'=-\frac{1}{5}(4x+3y), \\ y'=\frac{1}{5}(3x-4y), \end{cases} \tag{2}$$

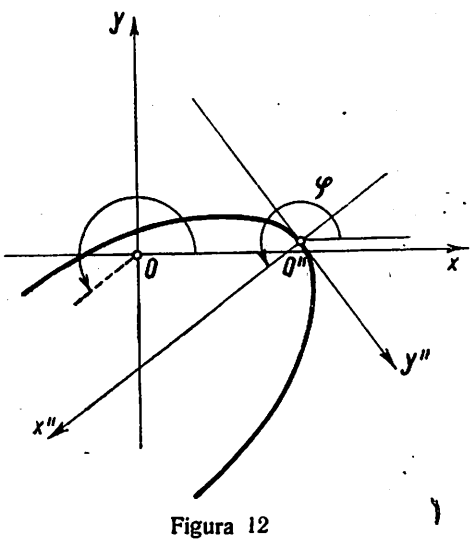


Figura 12

sau

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{5}(4x'-3y'), \\ y=-\frac{1}{5}(3x'+4y'). \end{cases} \tag{2'}$$

Inlocuind aceste valori în ecuația (1), găsim

$$y'^2-2x'-4y'-2=0 \tag{3}$$

Vom face acum translația

$$x'=x''+x_0,\quad y'=y''+y_0.$$

Înlocuind aceste valori în (3), obținem

$$y''^2-2x''+2(y_0-2)y''+y_0^2-2x_0-4y_0-2=0.$$

Determinăm componentele (x_0, y_0) ale translației

$$y_0-2=0,\quad y_0^2-2x_0-4y_0-2=0.$$

Găsim astfel

$$x_0=-3,\quad y_0=2.$$

Deci făcînd schimbarea de axe definite de formulele

$$\begin{cases} x=-\frac{4}{5}x''+\frac{3}{5}y''+\frac{18}{5}, \\ y=-\frac{3}{5}x''-\frac{4}{5}y''+\frac{1}{5}, \end{cases}$$

ecuația parabolei devine

$$y''^2=2x''.$$

Parametrul parabolei este $p=1$.

Vîrful parabolei este $V(x''=y''=0)$ sau $V\left(x=\frac{18}{5},\ y=\frac{1}{5}\right)$.

Focarul este $F\left(x''=\frac{p}{2},\ y''=0\right)$, adică $F\left(x=\frac{16}{5},\ y=-\frac{1}{10}\right)$.

Axa parabolei are ecuația $y''=0$, sau

$$3x-4y-10=0,$$

iar tangenta la vîrf este $x''=0$, adică

$$4x+3y-25=0.$$

4. *Să se scrie ecuația unei conice care trece prin punctul $A(1, 1)$ și prin punctele improprii ale axelor, avînd în aceste puncte ca tangente dreptele $y+2=0$, respectiv $3x-1=0$.*

Soluție.

Fie ecuația unei conice scrisă în coordonate omogene

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0. \qquad (1)$$

Punînd condiția ca această conică să treacă prin punctele X_∞ (1, 0,0), Y_∞ (0, 1, 0), A(1, 1, 1), obținem

$$a_{11}=a_{22}=0\ ;\ 2a_{12}+2a_{13}+2a_{23}+a_{33}=0. \qquad (2)$$

Tangenta la conica (1) în punctul X_∞ are ecuația

$$a_{12}x_2+a_{13}x_3=0.$$

Identificînd această dreaptă cu dreapta $x_2+2x_3=0$, obținem $a_{13}=2a_{13}$.
Tangenta la conica (1) în punctul Y_∞ are ecuația

$$a_{12}x_1+a_{23}x_3=0$$

Indentificînd această dreaptă cu dreapta $3x_1-x_3=0$, obținem $a_{12}=2a_{23}$.
Inlocuind aceste valori în a doua ecuație (2), obținem

$$a_{33}=-\frac{16\,a_{12}}{3}.$$

Ecuația conicei este deci

$$3x_1x_2+6x_1x_3-x_2x_3-8x_3^2=0$$

sau, în coordonate neomogene,

$$3xy+6x-y-8=0.$$

Conica este o hiperbolă cu centrul în punctul $\Omega\left\{\frac{1}{3},\ -2\right\}$.

5. Să se determine ecuația conicei care trece prin punctele $A(0,\ 1)$, $B(2,\ 0)$, $C(-1,\ 3)$ și prin punctele improprii ale axelor de coordonate.

Soluție.

In coordonate omogene, cele cinci puncte date sînt

$$A(0,\ 1,\ 0),\ B(2,\ 0,\ 1),\ C(-1,\ 3,\ 1),\ X_\infty\ (1,\ 0,\ 0),\ Y_\infty\ (0,\ 1,\ 0)$$

Să scriem întîi ecuația fasciculului de conica care trece prin punctele A, B, X_∞, Y_∞. Ecuațiile dreptelor AB și $X_\infty Y_\infty$ sînt

$$(AB):\ x_1+2x_2-2x_3=0;\qquad (X_\infty\ Y_\infty):\ x_3=0,$$

deci o conică degenerată din fascicul are ecuația

$$x_3(x_1+2x_2-2x_3)=0.$$

Dreptele AY_∞ și BX_∞ au ecuațiile

$$(AY_\infty):\ x_1=0;\qquad (BX_\infty):\ x_2=0,$$

deci a doua conică degenerată din fascicul are ecuația

$$x_1x_2=0.$$

Ecuația unei conice oarecare din fascicul este deci

$$x_1x_2+\lambda x_3(x_1+2x_2-2x_3)=0.$$

Punînd condiția ca această conică să treacă prin punctul C, obținem $\lambda=1$, deci ecuația căutată este

$$x_1x_2+x_1x_3+2x_2x_3-2x_3^2=0,$$

sau, în coordonate neomogene,

$$xy-x-2y++2=0.$$

Conica este deci o hiperbolă avînd centrul în punctul Ω $(-2, -1)$ și ca asimptote dreptele $x=-2$, $y+-1$.

6. *Să se determine ecuația conicei care trece prin punctele* $O(0, 0)$, $A(1, 2)$, $B(2, 1)$, $C(3, -1)$, *avînd în origine ca tangentă dreapta* $x-2y=0$.

Soluție.

Să scriem întîi ecuația fasciculului de conice care trece prin punctele A, B, C, D.

Dreptele AB și CD au ecuațiile

$$(AB): 2x-y=0; \qquad (CD): 2x+y-5=0,$$

deci conica de ecuație

$$(2x-y)(2x+y-5)=0,$$

reprezintă o conică degenerată din fasciculul considerat.

A doua conică degenerată din acest fascicul are ecuația

$$(x+3y)(x+y-3)=0.$$

Ecuația fasciculului este

$$(2x-y)(2x+y-5)+k(x+3y)(x+y-3)=0,$$

sau

$$((k+4)x^2+4kxy+(3k-1)y^2-(3k+10)x-(9k-5)y=0.$$

Tangenta la această conică în origine are ecuația

$$(3k+10)x+(9k-5)y=0.$$

Identificînd această dreaptă cu dreapta $x-2y=0$, obținem $k=-1$, deci ecuația conicei căutate este

$$3x^2-4xy-4y^2-7x+14=0.$$

Această conică este o hiperbolă avînd centrul în punctul $\Omega\left(\frac{7}{4}, \frac{7}{8}\right)$.

7. *Să se scrie ecuația parabolei care trece prin punctele* $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(2, 3)$.

Soluție.

Dreptele OA și BC au ecuațiile

$$(OA): y=0; \qquad (BC): x-y+1=0,$$

deci o conică degenerată care trece prin punctele O, A, B, C are ecuația

$$y(x-y+1)=0.$$

Dreptele OB și AC au ecuațiile

$$(OB): x=0; \qquad (AC): 3x-y-3=0,$$

deci a doua conică degenerată care trece prin cele patru puncte are ecuația

$$x(3x-y-3)=0.$$

Rezultă că fasciculul de conice care trece prin cele patru puncte date are ecuația

$$x(3x-y-3)+ky(x-y+1)=0,$$

sau

$$3x^2+(k-1)xy-ky^2-3x+ky=0. \qquad (1)$$

Invariantul δ al acestei conice este

$$\delta=\frac{k^2+10k+1}{4},$$

deci conica (1) este o parabolă dacă $k=-5\pm2\sqrt{6}$.

8. *Față de un sistem de coordonate ortogonale, să se scrie ecuația conicei care are originea ca focar și este tangentă la dreptele* $x=3$, $x=-2$, $y=1$.

Soluție.

Avînd în vedere că punctul $O(0, 0)$ este un focar al conicei, rezultă că ecuația ei este de forma

$$\sqrt{x^2+y^2}=\alpha x+\beta y+\gamma, \qquad (1)$$

unde $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ reprezintă directoarea conicei.

Ridicînd la pătrat ecuația (1), obținem

$$(\alpha^2-1)x^2+2\alpha\beta xy+(\beta^2-1)y^2+2\alpha\gamma x+2\beta\gamma y+\gamma^2=0. \qquad (2)$$

Să intersectăm această conică cu dreapta $x=3$. Găsim ecuația

$$(\beta^2-1)y^2+2\beta(3\alpha+\gamma)y+(3\alpha+\gamma)^2-9=0. \qquad (3)$$

Pentru ca dreapta $x=3$ să fie tangentă la conica (2), trebuie ca ecuația (3) să admită rădăcini confundate, adică

$$9\beta^2+(3\alpha+\gamma)^2-9=0. \tag{4}$$

Analog, punînd condiția ca dreptele $x=-2$ și $y=1$ să fie tangente la conică, obținem

$$4\beta^2+(2\alpha-\gamma)^2-4=0, \tag{4'}$$

$$\alpha^2+(\beta+\gamma)^2-1=0. \tag{4''}$$

Din ecuațiile (4) și (4') rezultă

$$\gamma(6\alpha-\gamma)=0$$

și ținînd seama că $\gamma\neq 0$ (în caz contrar focarul s-ar găsi pe directoare), deducem

$$\gamma=6\alpha.$$

Cu această valoare ecuațiile (4') și (4'') devin

$$4\alpha^2+\beta^2-1=0,$$
$$37\alpha^2+12\beta^2+12\alpha\beta-1=0.$$

Din acest sistem rezultă

$$\alpha=\pm\frac{4}{\sqrt{185}},\quad \beta=\pm\frac{11}{\sqrt{185}},\quad \gamma=\pm\frac{24}{\sqrt{185}}.$$

Înlocuind aceste valori în (2), obținem ecuația conicei căutate

$$169x^2+88xy+64y^2-192x+528y-576=0.$$

Avem $\delta=9\,480$, deci această conică este o elipsă.

9. Fie, într-un sistem de coordonate carteziene ortogonale, conica de ecuație

$$\alpha x^2-(\alpha^2-1)xy-\alpha y^2-(\alpha^2+1)y=0. \tag{1}$$

1° Să se determine genul conicei.

2° Să se găsească locul geometric al centrului conicei.

3° Fie M punctul în care conica (1) intersectează axa Oy a doua oară (diferit de 0). Să se scrie ecuația tangentei la conica (1) în punctul M și să se determine înfășurătoarea acestei tangente.

Soluție.

1° Avem

$$\delta=-\frac{(\alpha^2+1)^2}{4}<0,\quad \Delta=-2\alpha(\alpha^2+1)^2,$$

deci, dacă $\alpha\neq 0$ conica (1) este o hiperbolă, echilaterală, iar dacă $\alpha=0$ conica se reduce la sistemul de două drepte concurente $y=0$ și $x=1$.

2° Coordonatele centrului conicei (1) sînt

$$x=\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2},\ y=\frac{-2\alpha}{1+\alpha^2}. \tag{2}$$

Eliminînd pe α între relațiile (2), obținem ecuația

$$x^2+y^2-1=0. \tag{3}$$

Deci locul geometric al centrului conicei (1) este cercul (3).

3° Intersectînd conica (1) cu dreapta $x=0$, obținem punctul O și punctul $M\left(O,-\frac{\alpha^2+1}{1+\alpha^2}\right)$.

Tangenta la conica (1) în punctul M este

$$(\alpha^2-1)x+\alpha y+\alpha^2+1=0. \tag{4}$$

Pentru a găsi înfășurătoarea acestei drepte, trebuie să eliminăm pe α între ecuația (4) și ecuația

$$2\alpha x+y+2\alpha=0.$$

Obținem ecuația

$$4x^2+y^2=4.$$

10. Să se discute familia de conice de ecuație

$$(2-\lambda)x^2-8xy+3y^2+6x-4y+1=0.$$

In cazurile particulare obținute să se reducă la forma canonică, determinîndu-se elementele conicelor respective.

Soluție.

Avem $\Delta=\lambda+3$. Deci, dacă $\lambda=-3$ conica este degenerată. Ea se scrie

$$5x^2-8xy+3y^2+6x-4y+1=0$$

și se descompun în dreptele

$$x-y+1=0,\qquad 5x-3y+1=0,$$

concurente în punctul $A(1, 2)$.

Dacă $\lambda\neq-3$ conica este nedegenerată.

Calculînd invariantul δ avem $\delta=-3\lambda-10$.

Deci, dacă $\lambda=-\frac{10}{3}$ conica este o parabolă. Ecuația ei este

$$(4x-3y)^2+18x-12y+3=0.$$

Făcînd schimbarea de variabile,

$$\begin{cases} X=-\frac{1}{5}(3x+4y)+\frac{347}{250}, \\ Y=\frac{1}{5}(4x-3y)+\frac{54}{125}, \end{cases}$$

obținem forma canonică a parabolei,

$$Y^2=\frac{6}{125}X.$$

Ecuațiile axei tangentei la vîrf ale acestei parabole sînt

$$Y=0 \text{ și } X=0,$$

sau, trecînd la coordonatele x, y,

$$100x-75y+54=0 \text{ și } 150x+200y-347=0$$

Focarul are coordonatele $X=\frac{3}{250}$, $Y=0$ sau $x=\frac{12}{25}$, $y=\frac{34}{25}$.

Dacă $\lambda\neq-\frac{10}{3}$, -3, conica este nedegenerată cu centru.

Avem de asemenea $I=5-\lambda$. Deci, $I\Delta=(5-\lambda)(\lambda+3)$.

Dacă $\delta<0$, deci dacă $\lambda>-\frac{10}{3}$, conica este o hiperbolă.

Dacă $\delta>0$, deci dacă $\lambda<-\frac{10}{3}$, conica este o elipsă.

În acest caz avem $I\Delta<0$, adică elipsa este reală.

Centrul conicei este

$$C\left(\frac{1}{3\lambda+10}, \frac{2\lambda+8}{3\lambda+10}\right).$$

Ecuația seculară este

$$S^2+(\lambda-5)S-3\lambda-10=0$$

și are rădăcinile

$$S_{1,2}\ \frac{(5-\lambda)\pm\sqrt{(\lambda+1)^2+64}}{2}.$$

Deci, forma canonică a conicei este în acest caz

$$\frac{(5-\lambda)+\sqrt{(\lambda+1)^2+64}}{2}X^2+\frac{(5-\lambda)-\sqrt{(\lambda+1)^2+64}}{2}Y^2-\frac{\lambda+3}{3\lambda+10}=0.$$

11. *Să se scrie ecuația conicei care trece prin punctele (1,0) (2, 0), (0, 1), (0, 3), (2, 1).*

Soluție.

Introducînd în ecuația generală a unei conice, scrisă în coordonate neomogene, pe rînd cele cinci puncte, rezultă

$$a_{11}+2a_{13}+a_{33}=0, \quad 4a_{11}+4a_{13}+a_{33}=0, \quad a_{22}+2a_{23}+a_{33}=0$$
$$9a_{22}+6a_{23}+a_{33}=0, \quad 4a_{11}+a_{22}+4a_{13}+2a_{23}+a_{33}=0,$$

adică

$$a_{11}=3,\ a_{12}=\frac{3}{2},\ a_{22}=2,\ a_{13}=-\frac{9}{2},\ a_{23}=-4,\ a_{33}=6.$$

Ecuația conicei este

$$3x^2+3xy+2y^2-9x-8y+6=0.$$

12. *Fie o familie de conice de ecuație*

$$x^2+2\lambda xy+y^2-2x-4y+4=0,$$

unde λ *este un parametru.*

1° Să se discute conica (1) după valorile lui λ și să se reducă la forma canonică.

2° Să se determine locul geometric al centrului conicei (1).

Soluție.

1° Calculînd invarianții Δ și δ ai conicei (1), obținem

$$\Delta=-(2\lambda-1)^2, \delta=1-\lambda^2.$$

Dacă $\lambda=\frac{1}{2}$ conica este degenerată. Ecuația (1) se scrie în acest caz

$$x^2+xy+y^2-2x-4y+4=0.$$

și se descompune în două drepte imaginare conjugate,

$$1+i\sqrt{3})x+2y-4=0, \quad (1-i\sqrt{3})x+2y-4=0.$$

Dacă $\lambda\neq\frac{1}{2}$ conica este nedegenerată.

Dacă $\lambda=\pm1$ avem $\delta=0$, deci conica este parabolă. Ecuația (1) se scrie

$$(x+y)^2-2x-4y+4=0.$$

În cazul parabolei

$$(x-y)^2-2x-4y+4=0,$$

prin schimbarea de axe

$$X=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-y+\frac{7}{4}\right), \quad Y=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+y-\frac{3}{2}\right),$$

obținem forma canonică

$$Y^2=-\frac{\sqrt{2}}{2}X.$$

În cazul parabolei

$$(x-y)^2-2x-4y+4=0,$$

prin schimbarea de axe

$$X=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+y-\frac{5}{4}\right), \quad Y=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-y+\frac{1}{2}\right),$$

obținem forma canonică

$$Y^2=-\frac{3\sqrt{2}}{2}X.$$

Dacă $\lambda<-1$ sau $\lambda>1$, avem $\delta<0$, deci conica este o hiperbolă.

Dacă $-1<\lambda<1$, $\lambda\neq\frac{1}{2}$ avem $\delta>0$, deci conica este o elipsă.

În ambele cazuri, prin schimbarea de axe

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)+\frac{1-2\lambda}{1-\lambda^2},\qquad y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)+\frac{2-\lambda}{1-\lambda^2},$$

obținem forma canonică

$$\frac{X^2}{\frac{(2\lambda-1)^2}{(1+\lambda)^2(1-\lambda)}}-\frac{Y^2}{\frac{(2\lambda-1)^2}{(1-\lambda)^2(1+\lambda)}}-1=0.$$

2° Dacă notăm cu $f(x, y)$ membrul întîi al ecuației (1) coordonatele centrului conicei se află rezolvînd sistemul

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\equiv x+xy-1=0,\\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\equiv\lambda x+y-2=0.\end{cases}\tag{2}$$

Pentru a afla locul geometric al centrului conicei (1) trebuie deci să eliminăm parametrul λ între ecuațiile (2).

Obținem astfel ecuația

$$x^2-y^2-x+2y=0.\tag{3}$$

Deci, locul geometric al centrului conicei (1) este hiperbola echilaterală (3).

13. *Să se arate că conicele*

$$(1+k)x^2+(1+k)xy-2(1+k)y^2+(1-2k)x+(1+4k)y=0\tag{1}$$

trec prin patru puncte fixe. Să se determine natura acestor conice după valorile parametrului k.

G. Țițeica

Soluție.

Putem scrie ecuația (1) sub forma

$$x^2-xy-2y^2+x+y+k(x^2-xy-2y^2-2x+4y)=0,$$

deci conicele (1) trec prin intersecția conicelor

$$x^2-xy-2y^2+x+y=0,\qquad x^2-xy-2y^2-2x+4y=0.$$

Scriind ecuațiile acestor conice în coordonate omogene, coordonatele celor patru puncte fixe sînt soluțiile sistemului

$$\begin{cases} x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0, \\ x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Scăzînd aceste două ecuații, obținem

$$x_3(x_1 - x_2) = 0.$$

Pentru $x_3=0$, prima ecuație (2) devine $x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2 = 0$, avînd soluțiile $x_1 = -x_2$, $x_1 = 2x_2$.

Pentru $x_1 = x_2$, prima ecuație (2) se scrie $x_1(x_1 - x_3) = 0$, cu soluțiile $x_1 = 0$, $x_1 = x_3$.

Deci, conicele (1) trec prin punctele fixe

$$A_1(1, -1, 0),\ A_2(2, 1, 0),\ A_3(0, 0, 1),\ A_4(1, 1, 1).$$

Să calculăm acum invariații δ și Δ ai conicei (1). Avem

$$\delta = -\frac{9}{4}(k+1)^2, \quad \Delta = -\frac{9}{4}k(k+1)$$

Dacă $k=-1$, avem $\delta = \Delta = 0$, și conica (1) se scrie, în coordonate omogene,

$$x_3(x_1 - x_2) = 0,$$

deci se descompune în dreapta improprie a planului și dreapta de ecuație $x_1 - x_2 = 0$, adică în dreptele A_1A_2 și A_3A_4.

Dacă $k=0$, avem $\delta = -\frac{9}{4}$, $\Delta = 0$ și ecuația conicei se scrie

$$(x+y)(x-2y+1) = 0,$$

deci conica se descompune în dreptele de ecuații $x+y=0$, și $x-2y+1=0$, adică în dreptele A_1A_3 și A_2A_4.

Dacă $k \neq 1, 0$, avem $\delta < 0$, $\Delta \neq 0$, deci conica (1) este o hiperbolă. Centrul hiperbolei este punctul

$$C\left(\frac{4k-1}{3(k+1)}, \frac{2k+1}{3(k+1)}\right).$$

Ecuația în S se scrie

$$S^2 + (k+1)S - \frac{9(k+1)^2}{4} = 0.$$

avînd rădăcinile

$$S_1 = -\frac{\sqrt{10}+1}{2}(k+1), \quad S_2 = \frac{\sqrt{10}-1}{2}(k+1).$$

Forma canonică a conicei (1) este deci, în acest caz,

$$\frac{X^2}{\frac{4(\sqrt{10}-1)k}{9(k+1)^2}} - \frac{Y^2}{\frac{4(\sqrt{10}+1)k}{9(k+1)^2}} - 1 = 0.$$

14. *Față de un sistem de coordonate carteziene xOy se consideră conica de ecuație*

$$(1+\lambda)x^2 - 4xy + (\lambda-2)y^2 + 2(\lambda+3)x + 4(\lambda+3)y + 5(\lambda-9) = 0. \quad (1)$$

Se cere:

1° Să se discute natura conicei (1) după valorile parametrului și să se reducă la forma canonică ecuația conicei în fiecare caz obținut, determinîndu-se elementele principale ale conicelor obținute.

2° Să se determine locul geometric al centrului conicei (1).

Soluție.

1° Calculînd invarianții Δ și δ ai conicei (1), obținem

$$\Delta = -90(\lambda+2)(\lambda-1), \quad \delta = (\lambda+2)(\lambda-3).$$

a) Dacă $\lambda = -2$ avem $\Delta = \delta = 0$ și conica degenerează în două drepte paralele. De asemenea avem $\delta_1 = a_{11}a_{33} - a_{13}^2 = 54 > 0$ și deci cele două drepte sînt imaginare. Inlocuind pe λ cu -2 în ecuația (1), obținem ecuațiile celor două drepte

$$x + 2y = 1 \pm 3\sqrt{6}i.$$

b) Dacă $\lambda = 1$ avem $\Delta = 0$, $\delta = -6$ și conica degenerează în două drepte concurente reale:

$$2x - (2+\sqrt{6})y + 4(1+\sqrt{6}) = 0,$$
$$2x - (2-\sqrt{6})y + 4(1-\sqrt{6}) = 0.$$

c) Dacă $\lambda = 3$ avem $\Delta = -900$, $\delta = 0$ și conica este o parabolă avînd ecuația

$$(2x-y)^2 + 12(x+2y) - 30 = 0. \quad (2)$$

Făcînd rotația definită de ecuațiile

$$x' = \frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y), \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{5}}(2x-y),$$

ecuația parabolei devine

$$y'^2 = \frac{12\sqrt{5}}{5}\left(x' - \frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

Făcînd acum translaţia

$$X=x'-\frac{\sqrt{5}}{2},\quad Y=y'$$

obţinem ecuaţia

$$Y^2=-\frac{12\sqrt{5}}{5}X. \tag{3}$$

Deci, prin transformarea

$$X=\frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y)-\frac{\sqrt{5}}{2},\quad Y=\frac{-1}{\sqrt{5}}(2x-y)$$

reducem ecuaţia (2) a parabolei la forma canonică (3).

Vîrful parabolei are coordonatele $X=Y=0$, deci $x=\frac{1}{2}$, $y=1$.

Axa parabolei are ecuaţia $Y=0$, adică $2x-y=0$.

Tangenta la vîrf are ecuaţia $X=0$, adică $x+2y=\frac{5}{2}$.

Focarul parabolei are coordonatele $X=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$ $Y=0$, adică

$$x=-\frac{1}{10},\quad y=-\frac{1}{5}.$$

Directoarea are ecuaţia $X=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ sau $x+2y-\frac{11}{2}=0$.

Dacă $\lambda\neq-2$, 1, 3, conica (1) este nedegenerată cu centru. Centrul conicei este determinat de sistemul

$$(1+\lambda)x-2y+\lambda+3=0,\qquad -2x+(\lambda-2)y+2(\lambda+3)=0,$$

adică este $\Omega\left(-\frac{\lambda+3}{\lambda-3},\ -2\frac{\lambda+3}{\lambda-3}\right)$.

Inlocuind coeficienţii conicei în ecuaţia axelor, obţinem

$$(2x-y)[(\lambda-3)(x+2y)+5(\lambda+3)]=0,$$

deci axele conicei sînt

$$2x-y=0,\qquad (\lambda-3)(x+2y)+5(\lambda+3)=0.$$

Cosinusurile directoare ale acestor drepte sînt

$$a_1=\frac{1}{\sqrt{5}},\ b_1=\frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$a_2=-\frac{2}{\sqrt{5}},\ b_2=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Deci, pentru a reduce ecuația conicei la forma canonică, trebuie să facem transformarea

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{5}}(x'-2y')-\frac{\lambda+3}{\lambda-3}, \\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x'+y')-2\frac{\lambda+3}{\lambda-3}. \end{cases}$$

Înlocuind aceste valori în ecuația (1), obținem

$$(\lambda+3)^2x'^2+(\lambda+2)(\lambda-3)y'^2-90(\lambda-1)=0.$$

d) Dacă $\lambda<-2$ conica (1) este o elipsă imaginară.
e) Dacă $-2<\lambda<1$, $1<\lambda<3$ conica (1) este o hiperbolă.
f) Dacă $\lambda>3$ conica (1) este o elipsă reală.

2° Pentru a determina locul geometric al centrului conicei (1) trebuie să-l eliminăm pe λ între ecuațiile

$$x=-\frac{\lambda+3}{\lambda-3},\quad y=-2\frac{\lambda+3}{\lambda-3}.$$

Obținem astfel dreapta $y=2x$, adică una din axele conicei cînd $\lambda\neq 1,-1,-2,3$.

15. *Față de un sistem de axe carteziene ortogonale Ox, Oy se consideră familia hiperbolelor echilaterale de ecuație*

$$x^2-y^2-4x\cos\alpha-4(\sin\alpha+\sqrt{2})y=0, \qquad (1)$$

α fiind un parametru.

Să se determine locul geometric al centrului, vîrfurilor și focarelor acestor hiperbole.

Soluție.

Ecuația (1) se poate scrie

$$(x-2\cos\alpha)^2-[y+2(\sin\alpha+\sqrt{2})]^2+4(\sqrt{2}\sin\alpha+1)^2=0 \qquad (1')$$

De aci rezultă că centrul hiperbolelor are coordonatele

$$x=2\cos\alpha,\quad y=-2(\sin\alpha+\sqrt{2}).$$

Deci, locul geometric al centrului hiperbolelor este cercul

$$x^2+(y+2\sqrt{2})^2=4.$$

Din ecuația (1') rezultă, de asemenea, că axa reală a hiperbolei are ecuația $x=2\cos\alpha$. Vîrfurile reale ale hiperbolei (1) au deci coordonatele

$$\begin{cases} x=2\cos\alpha, \\ y=2(\sqrt{2}-1)(\sin\alpha-1); \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2\cos\alpha, \\ y=-2(\sqrt{2}+1)(\sin\alpha+1). \end{cases}$$

Deci, locul geometric al vîrfurilor reale ale hiperbolelor (1) este format din elipsele

$$\frac{x^2}{4}+\frac{(y^2+2\sqrt{2}-2)^2}{4(\sqrt{2}-1)^2}=1,\quad \frac{x^2}{4}+\frac{(y+2\sqrt{2}+2)^2}{4(\sqrt{2}-1)^2}=1.$$

Scriind ecuația (1) sub forma

$$(x-2\cos\alpha)^2+(y-2\sin\alpha)^2=2(y+\sqrt{2})^2,$$

deducem că unul din focarele hiperbolei (1) este $F(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$. Celălalt focar real este simetricul F față de centrul hiperbolic, deci este $F'(2\cos\alpha, -6\sin\alpha-4\sqrt{2})$.

Deci, locul geometric al punctului F este cercul

$$x^2+y^2=4,$$

iar locul geometric al punctului F' este elipsa

$$9x^2+(y+4\sqrt{2})^2=36.$$

16. *Se consideră față de un sistem de axe carteziene ortogonale, familia de conice de ecuație*

$$x^2+(y-4)^2=(x\cos\varphi+y\sin\varphi+\lambda)^2, \qquad (1)$$

unde φ și λ sînt parametri.

Se cere:

1° *Să se determine excentricitatea conicelor (1) și să se deducă de aici genul lor.*

2° *Să se determine λ în funcție de φ, astfel încît ecuația (1) să reprezinte o familie de conice nedegenerate (Γ), tangente la axa Ox.*

3° *Să se determine locul geometric al punctelor de intersecție ale conicelor (Γ), obținute pentru o valoare arbitrară a lui φ și pentru aceeași valoare mărită cu $90°$.*

Soluție.

1° Se știe că dacă ecuația unei conice este scrisă sub forma

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(ax+by+c)^2,$$

atunci un focar al ei este $F(\alpha, \beta)$, iar directoarea corespunzătoare acestui focar are ecuația $ax+by+c=8$, excentricitatea fiind $e=\sqrt{a^2+b^2}$.

În cazul conicei (1) excentricitatea este $e=1$, deci conica este de gen parabolă, deci focarul ei este $F(0, 4)$, iar directoarea are ecuația

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi+\lambda=0.$$

2° Intersectînd conica (1) cu axa Ox, obținem

$$x^2\sin^2\varphi-2\lambda x\cos\varphi+16-\lambda^2=0.$$

Pentru ca conica (1) să fie tangentă la axa Ox trebuie ca această ecuația să aibă rădăcinile confundate, adică

$$\lambda = \pm 4 \sin \varphi ;$$

cu această valoare ecuația parabolei (1) se scrie

$$(x \sin \varphi - y \cos)^2 \varphi \mp 28x \sin \varphi \cos \varphi - 8(1 \pm \sin^2 \varphi) y - 16 \cos^2 \varphi = 0, \qquad (1')$$

Discriminantul acestei conice este

$$\Delta = -32(1 \pm 1) \sin^2 \varphi.$$

Deci, pentru ca parabola (1') să fie nedegenerată, trebuie ca și

$$\lambda = 4 \sin \varphi$$
$$\varphi \neq k\pi.$$

Rezultă că familia de parabole (Γ) are ecuația

$$(x \sin \varphi - y \cos \varphi)^2 - 4x \sin 2\varphi - 8(1 + \sin^2 \varphi) y - 16 \cos^2 \varphi = 0 \qquad (2)$$

3° Pentru a găsi locul geometric căutat trebuie să eliminăm parametrul φ în ecuația (2) și cea obținută din (2) prin înlocuirea lui φ cu $90° + \varphi$, adică

$$(x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 + 4x \sin 2\varphi - 8(1 + \cos^2 \varphi) y + 16 \sin^2 \varphi = 0.$$

Adunînd aceste două ecuații, obținem

$$x^2 + y^2 - 24y + 16 = 0,$$

adică locul geometric căutat este cercul cu centrul în $C(0, 12)$ și cu raza $8\sqrt{2}$.

17. *Fie un sistem de axe carteizene ortogonale Ox, Oy și față de ele punctele $A(1,0)$ $B(0, 1)$ și dreapta (d) ale cărei coordonate tangențiale omogene sînt $1, 1, -a, (a \neq 1)$. Dacă C este un punct de pe dreapta (d), notăm cu D și E punctele în care dreptele AC și BC intersectează axele Oy respectiv Ox și cu F și G simetricele punctelor D, E față de mijlocul lui OB, respectiv față de mijlocul lui OA.*

Se cere :

1° *Să se determine ecuația conicei (Γ_1) descrisă de punctul de intersecție al dreptelor AF și BG, dacă punctul C descrie dreapta (d), și să se studieze conicele (Γ_1) după diversele valori ale lui a.*

2° *Să se arate că dreapta DE rămîne tangentă la o conică (Γ_2) și să se studieze conicele (Γ_2) după diversele valori ale lui a.*

Soluție.

Dreapta (d) are ecuația

$$x + y - a = 0,$$

deci punctul C are coordonatele α și $a - \alpha$.

Dreptele AC și BC au ecuațiile

$$(AC): (a-\alpha)x-(\alpha-1)y-a+\alpha=0; \quad (BC): (a-\alpha-1)x-\alpha y+\alpha=0,$$

deci ele intersectează axele Oy respectiv Ox în punctele

$$D\left(0, \frac{\alpha-a}{\alpha-1}\right), \quad E\left(\frac{\alpha}{\alpha-a+1}, 0\right).$$

Mijlocul lui OB este punctul $B_1\left(0, \frac{1}{2}\right)$, deci punctul F are coordonatele $0, \frac{a-1}{\alpha-1}$. Analog, G are coordonatele $\frac{1-a}{\alpha-a+1}$, 0.

1° Dreptele AF și BG au ecuațiile

$$(AF): \quad (a-1)x+(\alpha-1)y-a+1=0;$$

$$(BG): (\alpha-a+1)x-(a-1)y+a-1=0.$$

Pentru a găsi locul geometric al intersecției acestor două drepte, eliminăm pe α între ecuațiile lor. Obținem ecuația

$$(a-1)x^2+(a-2)xy+(a-1)y^2-(a-1)x-(a-1)y=0$$

sau, avînd în vedere că $a\neq 1$,

$$(\Gamma_1): \quad x^2+\lambda xy+y^2-x-y=0,$$

unde am pus

$$\lambda=\frac{a-2}{a-1}.$$

Calculînd invarianții acestei conice, obținem

$$\delta=\frac{4-\lambda^2}{4}, \quad \Delta=\frac{\lambda-2}{2}.$$

Deci, dacă $\lambda=2$, adică dacă $a=0$, conica (Γ_1) degenerează în două drepte paralele, și anume

$$x+y=0, \quad x+y-1=0,$$

care sînt bisectoarea a doua a axelor de coordonate și dreapta AB.

Dacă $\lambda=-2$, adică dacă $a=\frac{4}{3}$, conica (Γ_1) este parabola

$$(x-y)^2-x-y=0.$$

Prin schimbarea de variabile

$$x'=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), \quad y'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y),$$

parabola devine

$$y'^2=-\frac{\sqrt{2}}{2}x',$$

cu vîrful în $V(x'=0, y'=0)$ sau $V(x=0, y=1)$, și cu axa $y=0$ sau $x-y=0$.

Dacă $\lambda \neq \pm 2$, adică dacă $a \neq 0, \frac{4}{3}$, conica (Γ_1) este o conică nedegenerată cu centru. Ecuația în S se scrie

$$S^2 - 2S + 1 - \frac{\lambda^2}{2} = 0,$$

avînd rădăcinile

$$S = 1 \pm \frac{\lambda}{2}.$$

Deci, ecuația redusă a conicei (Γ') este

$$\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) x'^2 + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) y'^2 - \frac{1}{2+\lambda} = 0,$$

sau

$$\frac{(2+\lambda)^3}{2} x'^2 + \frac{4-\lambda^2}{2} y'^2 - 1 = 0,$$

Deci, conica (Γ_1) este elipsă dacă $-2 < \lambda < 2$ și hiperbolă dacă $\lambda < -2$ sau $\lambda > 2$, adică (Γ_1) este elipsă dacă $a < 0$ sau $a > \frac{4}{3}$ și este hiperbolă dacă $0 < a < \frac{4}{3}$.

2° Ecuația dreptei DE este

$$(\alpha - a + 1)(\alpha - a) x + \alpha(\alpha - 1) y - \alpha(\alpha - a) = 0.$$

Scriind că coordonatele tangențiale ale acestei drepte sînt u, v, w, obținem

$$\frac{u}{(\alpha - a)(\alpha - a + 1)} = \frac{v}{\alpha(\alpha - 1)} = \frac{w}{\alpha(a - \alpha)}.$$

Eliminînd între aceste ecuații parametrul α, obținem

$$(a-2)w^2 - v\,w - wu - auv = 0,$$

care este ecuația tangențială a conicei (Γ^2).

Ecuația punctuală a conicei (Γ_2'') este

$$x^2 - 2(a^2 - 4a + 1)xy + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0.$$

Calculînd invarianții acestei conice, găsim

$$\delta = -4a(a-1)^2(a-2), \quad \Delta = -4a^2(a-1)^4.$$

Avînd în vedere că $a \neq 1$, rezultă că (Γ_2) este degenerată dacă $a = 0$. In acest caz, conica degenerează în bisectoarea întîi luată de două ori.

Dacă $a = 2$, avem $\delta = 0$ și conica (Γ_2) este o parabolă. Ecuația ei este

$$(x - y)^2 - 4x - 4y + 4 = 0.$$

Prin schimbarea de variabile

$$x'=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y-1),\quad y'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y),$$

parabola devine

$$y'^2=-2\sqrt{2}x'.$$

Deci, vîrful parabolei este V $(x'=0,\ y'=0)$ sau

$$V\left(x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}\right),$$

iar axa are ecuația $y'=0$ sau $x=y$.

18. Fie A și B două puncte fixe și M un punct variabil pe o hiperbolă. Dacă notăm cu A' și B' punctele în care dreptele MA respectiv MB intersectează o asimptotă a hiperbolei, să se arate că $A'B'=$const.

M. Villa

Soluție.

Raportăm figura la sistemul de axe, în general oblic, determinat de asimptotele hiperbolei

Fie

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$$

ecuația hiperbolei.

Scriind că originea axelor este centrul hiperbolei, rezultă

$$a_{13}=a_{23}=0.$$

În acest caz avem $\Delta=a_{33}\delta$, deci ecuația comună a asimptotelor este

$$a_{11}x^2+2\,a_{12}xy+a_{22}y^2=0,$$

Pentru ca această ecuație să reprezinte axa Ox și axa Oy trebuie ca $a_{11}=a_{22}=0$.

Rezultă că ecuația unei hiperbole raportate la sistemul de axe format asimptotele ei este

$$xy=k.$$

Cele două puncte fixe sînt $A\left(\frac{k}{a},\ a\right)$, $B\left(\frac{k}{b},\ b\right)$, iar punctul mobil $M\left(\frac{k}{\alpha},\ \alpha\right)$.

Dreptele MA și MB au ecuațiile

$$(MA):\ a\alpha x+ky-k(a+\alpha)=0;$$
$$(MB):\ b\alpha x+ky-k(b+\alpha)=0.$$

Intersectînd aceste drepte cu una din asimptotele hiperbolei, de exemplu axa Oy, obținem punctele.

$$A'(0,\ a+\alpha),\ B'(0,\ b+\alpha).$$

De aici rezultă

$$\overline{A'B'}=b-a=\text{const.}$$

Intersectînd dreptele MA și MB cu cealaltă asimptotă a hiperbolei, obținem punctele

$$A''\left[\frac{k(a+\alpha)}{a\alpha},\ 0\right],\ B''\left[\frac{k(b+\alpha)}{b\alpha},\ 0\right].$$

Deci

$$\overline{A''B''}=\frac{k(b-a)}{ab}=\text{const.}$$

19. Se consideră în plan un cerc (Γ) cu centrul în punctul A_1 și cu raza $r_1=1$ și un punct A_2. Fie O un punct în plan astfel încît $\overline{PA_1}=2$, $\overline{PA_2}=4$ și $A_1PA_2=90°$.

Se cere:

1° Să se determine locul geometric al centrelor cercurilor (C) care trec prin O și intersectează cercul (Γ) sub un unghi de 60°.

2° Să se determine înfășurătoarea cercurilor (C).

Soluție.

1° Raportăm figura la sistemul de axe ortogonale A_1 O A_2. Avem deci O (0, 0), $A_1(2,\ 0)$, A_2 (0, 4).

Ecuația cercului (Γ) este

$$x^2+y^2-4x+3=0.$$

Fie $\Omega(\alpha,\ \beta)$ centrul cercului (C). Avînd în vedere că acest cerc trece prin O, ecuația lui este

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta x=0. \qquad (1)$$

Scriind că unghiul dintre cercurile (C) și (Γ) este de 60° rezultă

$$\frac{2\alpha-\frac{3}{2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\pm\frac{1}{2},$$

adică

$$\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=4\left(\alpha-\frac{3}{4}\right).$$

Rezultă că ecuația locului geometric este

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=4\left(x-\frac{3}{4}\right) \tag{2}$$

sau

$$15x^2-y^2-24x+9=0. \tag{2'}$$

Din ecuația (2) se vede că locul geometric este o hiperbolă avînd originea ca focar, dreapta $x=\frac{3}{4}$ ca directoare și excentricitatea $e=4$.

Scriind ecuația (2') sub forma

$$\frac{\left(x-\frac{4}{5}\right)^2}{\frac{1}{25}}-\frac{y^2}{\frac{3}{5}}-1=0,$$

rezultă că centrul hiperbolic este punctul de coordonate $\frac{4}{5}$, 0, iar semi-axele sînt $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

2° Avînd în vedere că α și β verifică ecuația (2'), rezultă

$$\beta=\pm\sqrt{15\alpha^2-24\alpha+9},$$

deci ecuația cercului (C) este

$$x^2+y^2-2\alpha x\mp 2\sqrt{15\alpha^2-24\alpha+9}\cdot x=0$$

sau, raționalizînd în raport cu parametrul α,

$$4(x^2-15y^2\alpha^2)-4[x(x^2+y^2)-24y^2]\alpha+(x^2+y^2)^2-36y^2=0. \tag{3}$$

Pentru a determina înfășurătoarea cercurilor (C) trebuie să punem condiția ca ecuația (3) considerată ca ecuație în necunoscuta α să aibă două rădăcini confundate. Avem

$$[x(x^2+y^2)-24y^2]^2-(x^2-15y^2)[(x^2+y^2)-36y^2]=0,$$

de unde rezultă

$$x^2+y^2-\frac{16}{5}x+\frac{13}{5}=0.$$

Deci înfășuratoarea căutată este un cerc cu centrul în punctul de coordonate $\frac{8}{5}$, 0 și cu raza $\frac{2}{5}$.

20. Fie A, B, C, D, patru puncte fixe în plan și (Γ) o conică fixă care trece prin A și B fără a trece prin C și D. Notînd cu M_1 și M_2 celelalte două puncte în care o conică variabilă care trece prin A, B, C, D, intersectează conica (Γ), să se demonstreze că dreapta M_1M_2 trece printr-un punct fix.

Soluție.

Avînd în vedere că o proiectivitate nu schimbă natura problemei, putem presupune că cele patru puncte A, B, C, D, sînt punctele improprii ale axelor, originea și punctul de coordonate omogene 1, 1, 1.

Avem deci $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ $D(1, 1, 1)$.

Ecuația conicei (Γ) este

$$(\Gamma): \; x_1x_2+ax_1x_3+ bx_2x_3+cx_3^2=0. \tag{1}$$

Dreptele AB, CD, AD, și BC au ecuațiile

$$(AB): x_3=0; \; (CD): x_1-x_2=0; \; (AD): x_2-x_3=0; \; (BC): x_1=0,$$

deci conicele degenerate care trec prin punctele A,B,C,D, au ecuațiile

$$x_3(x_1-x_2)=0 \qquad x_1(x_2-x_3)=0.$$

Rezultă că fascicolul de conice care trec prin punctele A,B,C,D, are ecuația,

$$x_1(x_2-x_3)+\lambda x_3(x_1-x_2)=0. \tag{2}$$

Scăzînd ecuațiile (1) și (2) obținem ecuația conicei care trece prin punctele A, B, M_1, M_2.

$$x_3[(a+1)\; x_1+bx_2+\; cx_3-\lambda(x_1-x_2)]=0.$$

Această conică este degenerată, deci este formată din dreapta improprie AB și din dreapta M_1M_2.

Rezultă că dreapta M_1M_2 are ecuația

$$(a+1)\, x_1+bx_2+cx_3-\lambda\,(x_1-x_2)=0.$$

Această dreaptă trece prin punctul fix, intersecția dreptelor

$$(a+1)\, x_1+bx_2+cx_3=0, \; x_1-x_2=0.$$

Deci, dreapta M_1M_2 trece prin punctul $P(c, c, -a-b-1)$.

21. Fie A, B, C, D, patru puncte pe o conică (γ) și (a), (b), (c), (d) tangentele la conica (γ) în aceste puncte. Notăm cu A', B', C', punctele de intersecție ale dreptei (d) cu BC, CA, AB, cu A, B, C, punctele de contact ale conicei (γ) cu celelalte tangente duse din A', B', C', și cu A, B, C punctele în care AA', BB', CC' retaie conica (γ). Să se arate că punctele D, (a, AA), (b, BB), (c, CC) sînt coliniare.

Soluție.

Vom considera un sistem de coordonate proiective cu punctele fundamentale $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$, $D(1, 1, 1)$. Dreapta (d) are ecuația

$$lx_1+mx_2+nx_3=0.$$

cu

$$l+m+n=0.$$

Ecuația conicei (γ) este

$$\lambda x_2x_3+\mu x_3x_1+\nu x_1x_2=0,$$

$$\lambda+\mu+\nu=0.$$

Avînd în vedere această relație, tangenta la conica (γ) în punctul D este

$$\lambda x_1+\mu x_2+\nu x_3=0.$$

Scriind că această ecuație este identică cu ecuația dreptei (d), obținem

$$\frac{\lambda}{l}=\frac{\mu}{m}=\frac{\nu}{n}.$$

Deci, conica (γ) are ecuația

$$(m+n)x_2x_3 - mx_3x_1 - nx_1x_2=0, \tag{1}$$

iar, dreapta (d),

$$(m+n)x_1 - mx_2 - nx_3=0. \tag{2}$$

Avînd în vedere că dreptele BC, CA, AB au ecuațiile $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, punctele A', B', C', au coordonatele

$$A'(0, m, -m),\ B'(n, 0, m+n),\ C'(m, m+n, 0).$$

Dreapta DA, polara punctului A' față de conica (γ), trece prin polul $A\equiv(b, c)$ al dreptei BC. De aici rezultă că punctul de intersecție al dreptelor DA_0 și BA' este conjugat armonic cu A_0 față de D, A_1.

Deci, fasciculul BA_0, BC, BD, BA_1 este un fascicul armonic. Dreptele AA_0, AC, AD, AA_1 au aceeași proprietate. Avînd în vedere că primele trei drepte ale fasciculului au ecuațiile.

$$x_3=0,\ x_2=0,\ x_2-x_3=0,$$

rezultă că dreapta AA_1 are ecuația

$$x_2+x_3=0.$$

Intersectînd această dreaptă cu conica (1), obținem punctul A și punctul A_1 $(m+n,\ m-n,\ n-m)$.

Dreapta AA' are ecuația $mx_2+nx_3=0$, deci ea intersectează conica (1) în punctele A și A_2 $[mn,\ n(m-n),\ m(n-m)]$.

Ecuația dreptei A_1A_2 este deci

$$(m-n)^2 x_1 - m^2x_2 - n^2x_3=0.$$

Tangenta (a) are ecuația

$$mx_3+nx_2=0,$$

deci punctul $(a,\ A_1A_2)$ are coordonatele

$$m^2+mn+n^2,\ m(m-n),\ n(n-m).$$

Dreapta care unește punctul D cu acest punct are ecuația

$$(m+n)(m-n)^2 x_1 - m$$
$$(m^2+mn-2n^2)\,x_2 - n\,(n^2-mn-2m^2)\,x_3=0. \qquad (3)$$

Avînd în vedere valoarea lui l, rezultă

$$m^2+mn-2n^2=(m-n)(m+2n)=(m-n)(n-l),$$
$$n^2+mn-2m^2=(n-m)(2m+n)=(n-m)(m-l).$$

Deci, ecuația (3) se scrie

$$l(m-n)\,x_1+m(n-l)\,x_2+n(l-m)\,x_3=0. \qquad (4)$$

Această ecuație fiind simetrică față de permutările circulare făcute simultan asupra literelor l, m, n și x_1, x_2, x_3, rezultă că pe dreapta (4) se află și punctele $(b,\ B_1B_2)$, $(c,\ C_1C_2)$.

22. *Fie M și N punctele în care o conică variabilă (γ), care trece prin patru puncte fixe A, B, C, D, intersectează din nou o conică fixă (γ_1) tangentă la dreptele AC și BC în punctele A și B.*

Să se demonstreze că dreapta MN trece printr-un punct fix și să se determine locul geometric al polului acestei drepte față de conica (γ).

Soluție.

Raportăm figura la un sistem de coordonate proiective care are ca puncte fundamentale punctele $A(1,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 1,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 1)$, $D(1,\ 1,\ 1)$.

Ecuația unei conice oarecare este

$$a_{11}x_1^2+a_{12}\,x_1x_2+a_{22}\,x_2^2+a_{13}x_1x_3+a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0. \qquad (1)$$

Scriind că această conică trece prin punctele A, B, C, D, obținem,

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=0,\ a_{12}+a_{13}+a_{23}=0.$$

Deci, conica (γ) are ecuația

$$\lambda x_2x_3+\mu x_3x_1+\nu x_1x_2=0,\ \lambda+\mu+\nu=0. \tag{2}$$

Dreptele AC și BC au ecuațiile

$$(AC): x_2=0;\quad (BC): x_1=0.$$

Scriind că conica (1) este tangentă la aceste drepte în punctele A, respectiv B, obținem condițiile $a_{11}=a_{22}=a_{13}=a_{23}=0$, deci ecuația conicei (γ_1) este

$$x_3^2+ax_1x_2=0,\quad (a=\text{const}). \tag{3}$$

Familia de conice care trec prin intersecția conicelor (γ) și (γ_1) are ecuația $\gamma+k\gamma_1=0$, sau

$$\lambda x_2x_3+\mu x_3x_1+\nu x_1x_2+k(x_3^2+ax_1x_2)=0. \tag{4}$$

Printre conicele acestei familii se află și conica degenerată formată din dreptele AB și MN. Avînd în vedere că ecuația dreptei AB este $x_3=0$, pentru a obține conica degenerată din familia (4) trebuie să luăm $k=-\frac{\nu}{a}$. In acest caz, ecuația (4) se scrie

$$x_3(a\mu x_1+a\lambda x_2-\nu x_3)=0.$$

Deci, dreapta MN are ecuația

$$a\mu x_1+a\lambda x_2-\nu x_3=0$$

sau, avînd în vedere că $\lambda+\mu+\nu=0$,

$$\mu(ax_1+x_3)+\lambda(ax_2+x_3)=0. \tag{5}$$

Această dreaptă trece prin punctul fix $P(1, 1'—a)$.

Pentru a găsi locul geometrical puctului dreptei MN față de conica (γ), vom scrie ecuația polarei unui punct de coordonate x_1', x_2', x_3' față de conica (γ). Această polară are ecuația

$$(\nu x_1'+\mu x_3')x_1+(\nu x_1'+\lambda x_3')x_2+(\mu x_1'+\lambda x_2')x_3=0$$

sau, avînd în vedere că $\lambda+\mu+\nu=0$,

$$[\lambda x_2'+\mu(x_2'-x_3')]x_1+[\lambda(x_1'-x_3')+\mu x_1']x_2-(\mu x_1'+\lambda x_2')x_3=0. \tag{6}$$

Identificînd ecuațiile (5) și (6), obținem

$$\frac{\lambda x_2'+\mu(x_2'-x_3')}{a\mu}=\frac{\lambda(x_1'-x_3')+\mu x_1'}{a\lambda}=\frac{\mu x_1'+\lambda x_2'}{-\lambda-\mu}$$

sau

$$\mu x_1' - \lambda x_2' = 0, \quad [\lambda^2 + (a+2)\lambda\mu + \mu^2]x_1' + a\lambda^2 x_2' - \lambda(\lambda - \mu)x_3' = 0.$$

Eliminînd pe λ și μ între aceste ecuații, obținem

$$x_1'^2 + 2(a+1)x_1' x_2' + x_2'^2 - x_1' x_3' - x_2' x_3' = 0$$

sau, trecînd la coordonate curente,

$$x_1^2 + 2(a+1)x_1 x_2 + x_2^2 - x_1 x_3 - x_2 x_3 = 0.$$

Deci, locul geometric este o conică prin punctul C și prin punctele în care dreptele AD, BD intersectează dreptele BC, AC, adică prin punctele $E(0, 1, 1)$ și $F(1, 0, 1)$.

23. Notăm cu x, y, z, coordonatele omogene punctuale, cu u, v, w coordonatele omogene tangențiale raportate la axele de coordonate ortogonale Ox, Oy și cu t un parametru arbitrar. Se cere:

1° Care este ecuația punctuală a locului geometric (Γ) de ecuații parametrice

$$\frac{x_1}{t^2} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{t}. \tag{1}$$

2° O conică variabilă (Γ') trece prin origine, are aceleași direcții asimptotice ca locul (Γ) și este tangentă la aceasta în punctul $M(t^2, 1, t)$. Să se găsească ecuația punctuală a locului geometric (Γ') în funcție de parametrul t.

3° Locul geometric al centrului conicei (Γ'), cînd t variază.

4° Locul geometric al vîrfurilor reale ale lui (Γ'), cînd t variază.

5° Să se găsească ecuația tangențială a locului geometric (Γ)

Soluție.

1° Rezultă din ecuațiile parametrice (1) că locul geometric (Γ) este format din pozițiile punctului de intersecție $M(t^2, 1, t)$ ale dreptelor (d_1), (d_2), reprezentate de ecuațiile

$$x_1 - tx_3 = 0, \quad x_3 - tx_2 = 0, \tag{2}$$

cînd parametrul t variază

Ecuația sa punctuală este

$$x_1 x_2 - x_3^2 = 0.$$

Se găsește astfel că locul geometric (Γ) este hiperbola echilaterală avînd axele de coordonate ca asimptote și punctele $A(1, 1, 1)$, $A_1(1, 1, -1)$ ca vîrfuri reale.

2° Dacă X, Y sînt punctele la infinit ale axelor de coordonate, conica (Γ') aparține fasciculului punctual al conicelor circumscrise triunghiului MXY, avînd ca tangentă în punctul M tangenta în acest punct al

hiperbolei (Γ). Aceasta este, deci, o conică din același fascicul și este chiar conica degenerată formată din dreptele (d_1) (d_2), reprezentate de ecuațiile (2). Dacă însemnăm cu λ un parametru arbitrar, ecuația generală a conicelor din fascicul este

$$\lambda\ (x_1x_2) - x_3^2\ ) + (x_1 - tx_3)\ (x_3 - tx_2) = 0.$$

Conica (Γ'), trecînd prin punctul O (0, 0, 1), corespunde la valoarea parametrului λ, pentru care avem

$$\lambda = -t\ ;$$

ecuația sa punctuală este deci

$$2tx_1x_3 - x_1x_2 - t^2x_2x_3 = 0. \qquad (3)$$

3° Conica (Γ'), ca și locul geometric (Γ), este o hiperbolă echilateră, centrul său este punctul de intersecție C al dreptelor (d'), $d(''$) de ecuații

$$2tx_2^2 - x_3 = 0, \quad tx_3 - 2x_1 = 0, \qquad (4)$$

iar locul geometric al acestui punct, cînd t variază, este hiperbola echilateră (Γ'') de ecuație

$$4x_1x_2 - x_3^2 = 0,$$

cu asimptote axele de coordonate, avînd ca vîrfuri reale punctele A' (1, 1, 2), A_1' (1, 1, -2).

4° Coordonatele punctului C, deduse din ecuațiile (4), fiind

$$x_1 = t^2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2t,$$

punctul C este la mijlocul distanței OM; axa reală a hiperbolei (Γ) este deci paralelă la bisectoarea întîi a unghiului xOy coborîtă din punctul C $(t^2, 1, 2t)$.

Deci, ecuația axei reale a lui (Γ') este

$$2tx_1 - 2tx_2 + (1+t^2)\ x_3 = 0. \qquad (5)$$

Vom obține ecuația locului geometric al vîrfurilor reale eliminînd parametrul t între ecuațiile (5) și (3). Aceste ecuații, ordonate în raport cu t, se scriu

$$t^2x_2x_3 - 2tx_1x_3 + x_1x_2 = 0, \quad t^2x_3 - 2t\ (x_1 - x_2) - x_3 = 0.$$

de unde

$$2tx_2^2 - (x_1+x_2)\ x_3 = 0, \quad t\ (x_1+x_2)\ x_3 - 2x_1^2 = 0.$$

Ecuația locului geometric al vîrfurilor reale (Γ) este deci

$$4\ x_1^2\ x_2^2 - (x_1+x_2)^2\ x_3^2 = 0.$$

Locul geometric considerat se descompune în două hiperbole echilatere (Γ_1), (Γ_2), de ecuații

$$2x_1x_2+(x_1+x_2)\,x_3=0, \quad 2x_1x_2-(x_1+x_2)\,x_3=0.$$

5° Rezultă din ecuațiile parametrice (1) că dreapta de coordonate (u, v, w) intersectează hiperbola (Γ) în puncte corespunzătoare valorilor lui t care verifică ecuația

$$ut^2+wt+v=0. \tag{6}$$

Pentru ca dreapta (u, v, w) să fie tangentă la hiperbola (Γ) trebuie ca ecuația (6) să aibă rădăcini confundate, deci

$$w^2-4uv=0.$$

Aceasta este, deci, ecuația tangențială a hiperbolei(Γ).

24. *Față de un sistem de coordonate ortogonale se dau trei puncte A, B, C, ale căror ecuații, în coordonate tangențiale, sînt.*

$$(A): \; u-w=0, \quad (B): \; v-w=0, \quad (C): \; u\cos\alpha+v\sin\alpha+w=0,$$

și se cere:

1° Să se determine coordonatele carteziene ale punctelor A, B, C.

2° Să se determine locul geometric (Γ) al punctului C cînd α variază.

3° Să se determine locul geometric (γ) al centrelor hiperbolelor echilatere trecînd prin punctele A și B și tangente la curba (Γ).

4° Notînd cu M și N punctele unde dreptele AC și BC intersectează axa Oy, respectiv Ox, să se demonstreze că dreapta MN rămîne mereu tangentă la o anumită conică, căreia i se cere ecuația punctuală, tangențială și elementele principale.

Soluție.

1° Pentru a găsi coordonatele carteziene ale punctului A trebuie să înlocuim în ecuația dreptei

$$ux+vy+w=0,$$

ecuația tangențială a lui A deci $w=u$. Obținem astfel fasciculul de drepte.

$$u(x+1)+vy=0,$$

care trece prn punctul fix $A(-1,0)$.

Analog obținem $B(0,-1)$, C $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

2° Notînd cu x și y coordonatele punctului C, avem

$$x=\cos\alpha, \quad y=\sin\alpha,$$

deci locul geometric (Γ) are ecuația

$$x^2+y^2-1=0,$$

fiind cercul cu centrul în origine și de rază 1. Punctele A și B se află deci pe (Γ)

3° Ecuațiile dreptelor AB și a tangentei la cercul (Γ) în C sînt

$$x+c+1=0\,; \qquad x\cos\alpha+y\sin\alpha-1=0.$$

Familia de conice trecînd prin punctele A și B de pe cercul (Γ) și tangente la acest cerc are ecuația

$$\Gamma+\lambda AB\cdot t=0,$$

unde prin t am notat tangenta la (Γ), adică

$$x^2+y^2-1+\lambda(x^2+y^2+1)\,(x\cos\alpha+y\sin\alpha-1)=0.$$

Pentru ca această conică să fie o hiperbolă echilateră, trebuie ca suma coeficienților lui x^2 și y^2 să fie nulă, deci

$$\lambda(\cos\alpha+\sin\alpha)+2=0$$

de unde deducem

$$\lambda=-\frac{2}{\cos\alpha+\sin\alpha}.$$

Deci, familia hiperbolelor echilatere căutate are ecuația

$f(x,y,z)\equiv 2(x+y+1)\,(x\cos\alpha+y\sin\alpha-1)-(\cos\alpha+\sin\alpha)\,(x^2+y^2-1)=0.$

Pentru a găsi locul geometric (γ) trebuie să-l eliminăm pe α între ecuațiile

$$f'_x(x,y,\alpha)=0, \qquad f'_y(x,y,\alpha)=0,$$

adică între ecuațiile

$$\begin{cases}(x+y+1)\cos\alpha-(x-y)\sin\alpha=1,\\ (x-y)\cos\alpha+(x+y+1)\sin\alpha=1.\end{cases}$$

Obținem astfel ecuația

$$(x+y+1)^2+(x-y)^2=2,$$

sau

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1.$$

Curba (γ) este deci un cerc cu centrul la mijlocul segmentului AB și cu raza 1.

4° Ecuațiile dreptelor AC, BC sînt

$$(AC):\ \sin\alpha\cdot x-(\cos\alpha+1)\,y+\sin\alpha=0\,;$$
$$(BC):\ \sin(\alpha+1)\,x-\cos\cdot y-\cos\alpha=0,$$

deci ele intersectează axele Oy, respectiv Ox, în punctele

$$M\left(0, m\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right),\quad N\left(\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}, 0\right),$$

sau $M(0,t)$, $N\left(\frac{1-t}{1+t}, 0\right)$, unde am notat $t=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Dreapta MN are deci ecuația

$$t(t+1)x-(t-1)y+t(t-1)=0.$$

Pentru a arăta că această dreaptă rămîne tangentă la o anumită curbă trebuie să arătăm că dreapta MN are înfășurătoare.

Pentru aceasta eliminăm parametrul t între ecuația dreptei MN și ecuația obținută din ea prin derivare în raport cu t, adică

$$2(x+1)t+(x-y-1)=0.$$

Obținem astfel conica

$$x^2-6xy+y^2-2x-2y+1=0. \qquad (1)$$

Pentru a găsi ecuația tangențială a acestei conice notăm coordonatele tangențiale ale dreptei MN cu u, v, w. deci avem

$$\frac{u}{t(t+1)}=\frac{v}{1-t}=\frac{w}{t(t-1)}.$$

Eliminînd parametrul t între aceste ecuații, obținem

$$uv+uw+vw-w^2=0,$$

care este ecuația tangențială a conicei (1).

Calculînd invarianții conicei (1) obținem $\delta=-8$, $\Delta=-16$.

Deci, conica (1) este o hiperbolă. Centrul ei se obține din sistemul

$$x_0-3y_0=1,\quad -3x_0+y_0=1.$$

adică este punctul $H\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Notînd cu φ unghiul dintre axa Ox și axa transversă a hiperbolei, găsim $\operatorname{tg}\varphi=1$, adică axele hiperbolei au ecuațiile

$$x-y=0,\quad x+y+1=0.$$

Ecuația în S are rădăcinile $S_1=4$, $S_2=-2$.

Ecuația redusă a conicei (1) este

$$\frac{X^2}{2}-\frac{Y^2}{4}-1=0. \qquad (2)$$

Această ecuație se obține prin schimbarea de variabile

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)-\frac{1}{2},$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)-\frac{1}{2}.$$

Asimptotele hiperbolei au ecuația

$$Y=\pm\sqrt{2}X$$

sau

$$(\sqrt{2}+1)x+(\sqrt{2}-1)y+\sqrt{2}=0,\ (\sqrt{2}-1)x+(\sqrt{2}+1)y-\sqrt{2}=0.$$

25. *Fie o parabolă* (Γ) *și* F *focarul ei. Să se demonstreze că perechile de drepte perpendiculare conjugate față de* (Γ) *intersectează axa focală a parabolei în punctele simetrice față de focarul* F.

Soluție.

Considerăm sistemul de coordonate ortogonale cu originea în focarul F și cu axa Ox, axa parabolei.

Ecuația parabolei este deci

$$y^2=2p\left(x+\frac{p}{2}\right). \tag{1}$$

Ecuația tangențială a parabolei (în coordonate plückeriene neomogene) este

$$pu^2+pv^2-2u=0. \tag{2}$$

Condiția ca două drepte de coordonate plückeriene u, v și U, V să fie conjugate față de parabola (Γ) este dată de forma dedublată a ecuației (2), adică

$$(pu-1)U+pv\,V-u=0. \tag{3}$$

Pentru ca cele două drepte de mai sus să fie perpendiculare trebuie ca

$$uU+vV=0. \tag{4}$$

Din relațiile (3) și (4) rezultă $U=-u$.

Dreapta $ux+vy+1=0$ determină pe Ox segmentul $x_1=-\frac{1}{u}$, iar dreapta $Ux+Vy+1=0$ determină pe Ox segmentul $x_2=-\frac{1}{U}$.

Deci $x=-x^2$, adică cele două drepte taie axa focală a parabolei în puncte simetrice față de focar.

26. *Se consideră un sistem de axe carteziene ortogonale* xOy *și față de acest sistem punctul* A (λ, μ) *și* A_1, A_2 *proiecțiile lui pe cele două axe.*

Să se demonstreze că, dacă A se mișcă pe dreapta (d) de coordonate tangențiale omogene a, b, c, dreapta A_1A_2 rămîne tangentă la o parabolă, căreia i se cere ecuația tangențială și punctuală, focarul și directoarea.

Soluție.

Dreapta A_1, A_2 are ecuația

$$\mu x+\lambda y-\lambda\mu=0,$$

deci are coordonatele tangențiale $u=\frac{1}{\lambda}$, $v=\frac{1}{\mu}$, $w=-1$.

Avînd în vedere că punctul A se află pe dreapta $d(a, b, c)$, rezultă

$$\lambda a+\mu b+c=0.$$

Deci dreapta A_1A_2 rămîne tangentă la curba

$$\frac{a}{u}+\frac{b}{v}-\frac{c}{w}=0.$$

sau

$$avw+bwu-cuv=0. \qquad (1)$$

Aceasta este ecuația tangențială a parabolei căutate. Calculînd reciprocii discriminantului ecuației (1), obținem ecuația punctuală a parabolei

$$(ax-by)^2+2ac\,x+2bc\,y+c^2=0.$$

Pentru a găsi focarul parabolei (1) vom scrie că tangentele duse din punctul $M(\alpha, \beta)$ sînt dreptele izotrope. Ecuația tangențială a punctului F este

$$u\alpha+v\beta+w=0.$$

Eliminînd pe w între această ecuație și ecuația (1) a parabolei, obținem

$$b\alpha u^2+(a\alpha+b\beta+c)\,uv+a\beta v^2=0. \qquad (2)$$

Pentru ca cele două tangente să fie dreptele izotrope, trebuie ca ecuația (2) să aibă soluțiile $\frac{u}{v}=\pm i$, deci ea trebuie să fie echivalentă cu ecuația $u^2+v^2=0$. Rezultă

$$a\alpha+b\beta+c=0, \quad b\alpha=a\beta.$$

Deci, focarul parabolei (1) este $F\left(-\frac{ac}{a^2+b^2}, -\frac{bc}{a^2+b^2}\right)$, adică este tocmai proiecția punctului 0 pe dreapta (d).

Pentru ca punctul $M(\alpha, \beta)$ să fie pe directoarea parabolei (1) trebuie ca tangentele duse din el la parabolă să fie perpendiculare, deci ecuația (2) să aibă produsul rădăcinilor egal cu -1, adică $\frac{a\beta}{b\alpha}=-1$.

Deci, directoarea parabolei (1) are ecuația

$$bx+ay=0.$$

27. Față de un sistem de axe de coordonate ortogonale Ox, Oy se consideră punctele A, B, C, care au ecuațiile tangențiale

$$4u+w=0, \quad 2u+w=0, \quad 3v+w=0.$$

Se consideră de asemenea cercul (γ), cu diametrul OC și parabola (π) înscrisă în triunghiul AOC și trecînd prin B.

1° Să se determine ecuația punctuală și tangențială a parabolei.

2° Să se afle locul geometric al polului, în raport cu cercul (γ), al tangentei la parabola (π).

Soluție.

1° Avînd în vedere ecuațiile tangențiale ale punctelor A, B, C, rezultă că aceste puncte au coordonatele $A(4,0)$, $B(2, 0)$, $C(0,3)$ și deci ecuația punctuală a dreptei AC este

$$(AC) : 3x+4y-12=0.$$

Parabola (π) are ecuația

$$(ax-by)^2+cx+dy+f=0.$$

Punînd condițiile ca această parabolă să fie tangentă la dreptele OA, OC, AC, și să treacă prin B, obținem

$$a=-\frac{3b}{2}, \quad c=-9b^2, \quad d=6b^2, \quad f=9b^2.$$

Deci, ecuația punctuală a parabolei (π) este

$$9x^2+12xy+4y^2-36x+24y+36=0. \tag{1}$$

Calculînd reciprocii determinantului Δ al acestei parabole, obținem ecuația tangențială a ei

$$(\pi) : 6uv-2uw+3vw=0. \tag{2}$$

Putem obține această ecuație și în alt mod. Familia de conice care sînt înscrise în trunghiul AOC și trec prin B are ecuația tangențială

$$A\cdot O+\lambda B\cdot C=0,$$

unde prin A, O, B, C am notat ecuațiile tangențiale ale acestor puncte. Deci, ecuația familiei este

$$w(4u+w)+\lambda(2u+w)\,(3v+w)=0. \tag{2'}$$

O conică este parabolă dacă în ecuația tangențială coeficientul lui w este nul. Punînd această condiție, deducem $\lambda=-1$, care înlocuit în (2') ne dă ecuația (2).

2° Avînd în vedere că cercul (γ) are diametrul OC, el are ecuația

$$(\gamma) : x^2+y^2-3y=0.$$

Polara punctului $P(\alpha, \beta)$ față de acest cerc are ecuația

$$2\alpha x+(2\beta-3)y-3\beta=0. \tag{3}$$

Deci, coordonatele tangențiale ale polarei, față de (γ), a punctului P sînt $u=2\alpha$, $v=3\beta-3$, $w=-3\beta$. Pentru ca dreapta (3) să fie tangentă la parabola (π) trebuie ca coordonatele ei tangențiale să verifice ecuația tangențială a parabolei. Deci,

$$12\alpha(2\beta-3)+12\alpha\beta-9\beta(2\beta-3)=0$$

sau în coordonate curente

$$4xy-2y^2-4x+3y=0. \tag{4}$$

Această conică este locul geometric căutat. Ea reprezintă o hiperbolă cu centrul în punctul $M\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ și cu ecuația redusă.

$$(\sqrt{5}+1)X^2-(\sqrt{5}-1)Y^2-1=0.$$

28. Se consideră parabolele care au aceeași axă și același focar. Înfășurătoarea tangentelor acestor parabole în punctele unde intersectează un cerc dat trece prin focar.

Soluție.

Raportăm figura la două axe rectangulare Ox, Oy, O fiind focarul parabolei considerate, iar Ox axa de simetrie. Ecuațiile acestor parabole și ale cercului sînt

$$x^2+y^2=(x+p)^2, \tag{1}$$

$$x^2+y^2+2mx+2ny=0. \tag{2}$$

O tangentă la parabola (1) are coordonatele tangențiale

$$u=p, \quad v=-y, \quad w=p(x+p).$$

Deci,

$$\frac{v}{u}=-\frac{y}{p}, \quad \frac{w}{u}=x+p.$$

Înlocuind valorile lui x și y scoase din ultimele ecuații în (1) și (2), avem

$$p(u^2+v^2)=2uw, \quad 2p(mu^2+nuv)=w^2+2muw.$$

Este suficient să eliminăm parametrul p între aceste două ecuații pentru a obține ecuația tangențială a înfășurătoarei.
Obținem ecuația

$$(u^2+v^2)w=2(mu^2+2nuv-mv^2)u.$$

Deci, înfășurătoarea este o curbă de clasa treia.

29. *Fiind dată o conică (Γ), să se determine locul geometric al punctelor de intersecție ale tangentelor la conică cu dreptele ce trec printr-un punct fix și fac cu aceste tangente un unghi constant.*

Soluție.

Fie ecuația tangențială a conicei

$$Au^2+2Buv+Cv^2+2Du\,w+2\,Evw+Fw^2=0. \tag{1}$$

O tangentă la conica (Γ) are ecuația

$$ux+vy+w=0. \tag{2}$$

Notînd cu α unghiul pe care această tangentă îl face cu axa Ox, avem $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{u}{v}$.

Vom nota cu ω unghiul constant dintre dreapta (2) și dreapta ce trece prin punctul fix, pe care l-am luat ca origine a axelor de coordonate și $\operatorname{tg}\omega=\frac{h}{k}$.

Coeficientul unghiular al dreptei care trece prin punctul O și face cu dreapta (2) unghiul ω este deci

$$\operatorname{tg}(\alpha+\omega)=\frac{hv-ku}{hu+kv},$$

iar ecuația dreptei este

$$(kx+hy)u+(ky-hx)v=0. \tag{3}$$

Pentru a găsi ecuația locului geometric trebuie să eliminăm pe u, v, w între ecuațiile (1), (2), (3).

Din ecuațiile (2) și (3) deducem

$$u=\lambda(hx-ky),\quad v=\lambda(kx+hy),\quad w=-\lambda h(x^2+y^2)$$

Inlocuind aceste valori în ecuația (1), obținem

$$\begin{aligned}&A(hx-ky)^2+2B(hx-ky)(kx+hy)+\\&+C(kx+hy)^2-2h[D(hx-ky)+E(kx+hy)](x^2+y^2)+Fh^2\,(x^2+y^2)^2=0\end{aligned} \tag{4}$$

Dacă conica (Γ) este conică cu centru ($F\neq 0$), locul geometric este o curbă de gradul al patrulea și anume o cuartică bicirculară avînd originea ca punct dublu.

Dacă conica este o parabolă ($F=0$), locul geometric este o cubică circulară avînd originea ca punct dublu.

Acest loc geometric se numește podara oblică a punctului O față de conica (Γ).

30. *Se construiește o conică (Γ_1) avînd ca focar unul din vîrfurile conicei (Γ) trecînd prin focarul vecin și avînd ca directoare o tangentă la (Γ).*

Să se demonstreze că axa focală a conicelor (Γ_1) este de mărime constantă și să se găsească înfășurătoarea directoarelor.

Soluție.

Ecuația carteziană a lui (Γ), raportată la un sistem de axe având ca origine vîrful său, este

$$x^2(1-e^2)+y^2-2px=0.$$

Dacă directoarea lui (Γ_1) este tangentă la (Γ) în punctul P în care această curbă întîlnește dreapta $y=\lambda x$, se găsește ușor ecuația carteziană a lui (Γ_1):

$$(x^2+y^2)[\lambda^2+(1+e^2)]+[x(1-e^2-\lambda^2)+2\lambda y-2p]^2=0$$

Ecuația sa polară este

$$\rho^2[\lambda^2+(1+e)^2]+\rho\cos\theta(1-e^2-\lambda^2)+2\lambda\rho\sin\theta=2p.$$

Această ecuație se poate scrie sub forma

$$\rho[1+e_1\cos(\theta-\alpha)]=p_1.$$

notînd prin e_1 excentricitatea lui (Γ_1), prin p_1 parametrul său și prin α unghiul polar al axei focale. Identificarea dă

$$\frac{p_1}{1-e_1^2}=\frac{p}{2e},$$

ceea ce arată că semiaxa focală a lui (Γ_1) este egală cu jumătatea distanței de la focarul conicei (Γ) la directoarea corespunzătoare.

A doua directoare a conicei (Γ_1) este

$$\rho e\cos\theta(1-e^2-\lambda^2)+2\lambda e\rho\sin\theta+p(1+e^2+\lambda^2)=0.$$

Această dreaptă are ca înfășurătoare conica

$$e^2\rho^2(e^2\cos^2\theta-1)-3pe^3\rho\cos\theta+p^2(1+e^2)=0,$$

ale cărei focare sînt pe axa focală a lui (Γ) și au ca abscise

$$x_1=\frac{p}{1-e},\quad x_2=\frac{p}{1+e}.$$

Unul dintre ele este al doilea focar al lui (Γ).

31. *1° Să se formeze ecuația generală a hiperbolelor care admit ca asimptotă axa Oy și tangente la axa Ox în punctul A de abscisă a.*

2°. Să se arate că cea de a doua asimptotă trece printr-un punct fix.

Soluție.

1° Pentru ca conica

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0$$

să aibă ca asimptotă pe Oy trebuie ca pentru $x=0$ ecuația să admită rădăcina dublă $x_3=0$. Trebuie deci să avem $a_{22}=0$, $a_{23}=0$, iar ecuația devine

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+a_{33}x_3^2=0$$

Să scriem acum că această conică este tangentă la Ox în A; rezultă că ecuația

$$a_{11}x_1^2+2a_{13}x_1x_3+a_{33}x_3^2=0$$

admite ca rădăcina dublă pe a, adică

$$a_{11}x_1^2+2a_{13}x_1x_3+a_{33}x_3^2\equiv a_{11}(x_1-ax_3)^2.$$

Deci, ecuația generală cerută este

$$a_{11}(x_1-ax_3)^2+2a_{12}x_1x_2=0$$

sau

$$(x_1-ax_3)^2+\lambda x_1x_2=0, \quad \left(\lambda=\frac{2a_{12}}{a_{11}}\right).$$

2° Ecuația hiperbolelor se mai poate scrie sub forma

$$(x_1+\lambda x_2-2ax_3)x_1+a^2x_1^2=0,$$

ceea ce ne arată că a doua asimptotă are ecuația

$$x_1+\lambda x_2-2ax_3=0.$$

Această asimptotă trece prin punctul fix $B(2a, 0, 1)$.

32. *Se dau două axe de coordonate Ox, Oy și două puncte A, B simetrice în raport cu prima bisectoare $y=x$.*

Se consideră conicele care trec prin A, B și care sînt tangente la axele Ox, Oy. Să se arate că ele se împart în două categorii.

Să se formeze pentru fiecare din ele ecuația generală a acestor curbe.

Soluție.

Ecuația generală a conicelor tangente la Ox și Oy este

$$\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}-1\right)^2+2\lambda xy=0. \tag{1}$$

Fie $A(a, b)$, $B(b, a)$ cele două puncte; punînd condiția ca conica (1) să treacă prin aceste puncte, avem

$$\left(\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}-1\right)^2+2\lambda ab=0, \tag{2}$$

$$\left(\frac{b}{\alpha}+\frac{a}{\beta}-1\right)^2+2\lambda ab=0. \tag{3}$$

Scăzînd aceste două ecuații obținem

$$\left(\frac{a+b}{\alpha}+\frac{a+b}{\beta}-2\right)(a-b)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)=0.$$

Presupunînd $a-b\neq 0$, altfel A și B ar fi confundate, avem de considerat două cazuri

1° $\alpha=\beta$. Relația (2) ne dă

$$\lambda=-\frac{1}{2ab}\left(\frac{a+b}{\alpha}-1\right)^2,$$

deci ecuația (1) se scrie

$$(x+y-\alpha^2)-\frac{(a+b-\alpha)^2}{ab}xy=0.$$

2° $\frac{a+b}{\alpha}+\frac{a+b}{\beta}-2=0$. Notînd

$$\frac{a+b}{\alpha}=1+\mu,$$

rezultă

$$\frac{a+b}{\beta}=1-\mu.$$

De aici deducem

$$\alpha=\frac{a+b}{1+\mu},\qquad \beta=\frac{a+b}{1-\mu}$$

și ecuația (2) ne dă

$$\lambda=-\frac{(a-b)^2\mu}{2(a+b)^2ab}.$$

Ecuația conicei (1) se scrie

$$[(1+\mu x)+(1-\mu)y-a-b]^2-\frac{\mu^2(a-b)^2}{ab}xy=0.$$

33. *Se dau două conice (K) și (K') și o dreaptă (r). Se consideră două perechi de tangente respectiv la (K) și la (K') în punctele de intersecție cu (r).*

Să se arate că punctele comune ale conicelor (K) și (K') și punctele comune ale perechilor de tangente de mai sus sînt situate pe o aceeași conică.

Soluție.

Fie

$$K=0,\quad K'=0,\quad r=0$$

respectiv ecuațiile în coordonate proiective ale conicelor (K), (K') și a dreptei (r).

Perechile de tangente respectiv la (K) și la (K') în punctele de intersecție cu (r) au ecuațiile

$$\lambda K + r^2 = 0, \quad \lambda' K' + r^2 = 0, \tag{1}$$

unde λ, λ' au valori bine determinate.

Scăzînd membru cu membru ecuațiile (1), se obține

$$\lambda K - \lambda' K' = 0.$$

adică ecuația unei conice care după felul cum a fost obținută trece prin punctele de intersecție ale perechilor de tangente și prin punctele de intersecție ale lui (K) și (K').

34. La o hiperbolă (H) sînt date o pereche de diametre conjugate unghiul format de asimptote și un punct.

Să se determine conicele care satisfac la aceste condiții.

Soluție.

Vom lua sistemul de referințe astfel ca cele două diametre conjugate să fie dreptele $y=o$ și $y=ax$, unde a este o constantă.

Vom nota cu (h, k) coordonatele punctului dat de pe hiperbolă. Ecuația conicei va fi de forma

$$\alpha(y - ax)^2 + \beta)^2 + 1 = 0, \tag{1}$$

unde α, β sînt doi parametri care trebuie determinați.

Punctul (h, k) trebuie să satisfacă ecuația (1), deci avem

$$\alpha(k - ah)^2 + \beta k^2 + 1 = 0. \tag{2}$$

Dar coeficienții unghiulari m ai asimptotelor din (1) sînt soluțiile ecuației

$$(\alpha + \beta)m^2 - 2m\alpha a + a^2 = 0. \tag{3}$$

Fiind dați m_1, m_2 soluțiile ecuației (3), avem

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2},$$

adică

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{2a\sqrt{a^2 - (\alpha + \beta)}}{a^2 + \alpha + \beta}.$$

Notînd $\operatorname{tg}\varphi = l$, l fiind dat, avem

$$l^2(a^2 + \alpha + \beta) - 4a^2(a^2 - \alpha - \beta) = 0. \tag{4}$$

Soluțiile problemei se obțin rezolvînd sistemul format de ecuațiile (2) și (4) cu necunoscutele α, β. Acest sistem fiind de gradul al doilea rezultă că avem două soluții, deci două hiperbole (H).

35. Să se determine înfășurătoarea hiperbolelor echilatere tangente la o dreaptă dată și ale căror asimptote intersectează această dreaptă în două puncte fixe.

Soluție.

Luăm ca axe de coordonate dreapta dată și mediatoarea segmentului determinat de cele două puncte fixe de pe ea.

Deci, dreapta dată are ecuația $y=0$, iar cele două puncte fixe sînt $A\ (a,\ o)$, $B(-a,\ o)$.

Ecuația unei hiperbole echilatere este

$$x^2+2\alpha xy-y^2+2\beta x+2\gamma y+\delta=0. \tag{1}$$

Scriind că această hiperbolă este tangentă la axa Ox, obținem $\delta=\beta^2$.

Ecuația celor două asimptote ale hiperbolei (1) este

$$(x+\alpha y+\beta)^2+2\alpha(x+\alpha y+\beta)(\alpha x-y+\gamma)-(\alpha x-y+\gamma)^2=0.$$

Punînd condiția ca aceste asimptote să treacă prin punctele A și B. obținem ecuațiile

$$\begin{cases}(a+\beta)^2+2\alpha(a+\beta)(\alpha a+\gamma)-(\alpha a+\gamma)^2=0,\\ (a-\beta)^2\alpha+2(a-\beta)(\alpha a-\gamma)-(\alpha a-\gamma)^2=0,\end{cases}$$

de unde deducem

$$\beta=0,\quad \gamma=-a\sqrt{1+\alpha^2}.$$

Notînd acum

$$\alpha=\frac{m^2-1}{2m},$$

obținem ecuația hiperbolei căutate, sub forma

$$f(x,y,m)=m(x^2-y^2)+(m^2-1)xy-(m^2+1)y=0. \tag{1'}$$

Pentru a găsi înfășurătoarea acestei familii de hiperbole trebuie să eliminăm pe m între, ecuațiile sistemului

$$f(x,y,m)=0\quad f'_m(x,y,m)=0$$

sau între ecuațiile (1') și

$$2y(x-a)m+x^2-y^2=0.$$

Obținem astfel ecuația înfășurătoarei

$$(x^2+y^2-2ay)(x^2+y^2+2ay)=0.$$

Deci, înfășurătoarea este formată din

$$x^2+y^2-2ay=0,\quad x^2+y^2+2ay=0,$$

deci din cercurile cu centrele în A și B și de rază a.

Avem deci rezultatul: înfășurătoarea hiperbolelor echilatere tangente la o dreaptă dată și ale căror asimptote trec prin două puncte fixe de pe această dreaptă este formată din cercurile cu centrul în cele două puncte fixe și care sînt tangente între ele.

36. *Vîrful unui unghi constant alunecă pe o dreaptă dată și una din laturi trece printr-un punct fix.*

Să se demonstreze că a doua latură înfășoară o parabolă. Să se determine focarul, directoarea și axa acestei parabole.

Soluție.

Luăm ca axă *Oy* dreapta dată pe care alunecă vîrful unghiului, iar ca axă *Ox* perpendiculară coborîtă pe această dreaptă din punctul fix, care va fi *A (a, o)*.

Notînd cu $V(0, \alpha)$ vîrful mobil al unghiului și cu θ unghiul constant, latura unghiului care trece prin A are ecuația

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{\alpha}-1=0,$$

iar cealaltă latură

$$y-\alpha=\lambda x. \tag{1}$$

De aici rezultă

$$\frac{\lambda+\frac{\alpha}{a}}{1-\frac{\alpha\lambda}{a}}=\operatorname{tg}\varphi$$

și deci

$$\alpha=\frac{a(\operatorname{tg}\theta-\lambda)}{1+\lambda\operatorname{tg}\theta}.$$

Ecuația (1) se scrie

$$y-\frac{a(k-\lambda)}{1+k\lambda}=\lambda x,$$

unde am pus $k=\operatorname{tg}\theta$, sau ordonînd după puterile lui λ,

$$\lambda^2 kx+\lambda(x-ky-a)-k+ak=0. \tag{2}$$

Pentru a găsi ecuația înfășurătoarei acestei drepte trebuie să eliminăm parametrul λ între ecuația (2) și ecuația

$$2\lambda kx+x-ky-a=0.$$

Obținem astfel ecuația

$$(x+ky)^2-2a(1+2k^2)x+2aky+a^2=0. \tag{3}$$

Deci înfășurătoarea dreptei (2) este o parabolă.

Făcînd schimbarea de axe de coordonate

$$\begin{cases} X=\frac{1}{4k\sqrt{k^2+1}}(4k^2x-4ky-k+a), \\ Y=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}(x+ky-a), \end{cases}$$

ecuația (3) a parabolei devine

$$Y^2=\frac{4ak}{\sqrt{k^2+1}}X.$$

Deci, focarul parabolei este $F\ (x=\frac{ak}{\sqrt{k^2+1}}, y=0)$ sau

$$F\left(\frac{4ak^2+k+3a}{4(k+1)^2}, \frac{a-k}{4k(k^2+1)}\right).$$

Directoarea are ecuația

$$(d):\ X=\frac{ak}{\sqrt{k^2+1}}$$

sau

$$(d):\ 4k^2x-4ky+4k^2a-k+a=0.$$

Axa parabolei are ecuația

$$Y=0$$

sau

$$x+ky=a.$$

37. *Un unghi drept se rotește în jurul vîrfului său A și laturile sale întîlnesc o dreaptă fixă în punctele B, C. Să se determine înfășurătoarea conicei (γ) tangentă la dreapta AC, care are punctul B ca focar și perpendiculara la dreapta BC în punctul C ca directoare corespunzătoare.*

Soluție.

Luăm două axe rectangulare; BC o luăm ca axă Oy, iar axa Oy trece prin A. Dacă a este ordonata OA a punctului A și α este abscisa OC a punctului C, abcisa OB a punctului B este egală cu $\left(-\frac{a^2}{\alpha}\right)$, iar ecuația focală a conicei, cu focarul în B și cu directoarea $x=\alpha$, este

$$\left(x+\frac{a^2}{2}\right)^2+y^2=e^2(x-\alpha)^2.$$

Exprimînd că această conică este tangentă la dreapta AC de ecuație

$$ax+\alpha y-a\alpha=0,$$

găsim că:

$$e^2=\frac{a}{\alpha^2}.$$

Ecuația conicei (γ) este deci

$$(\alpha x+a^2)^2+\alpha^2 y^2-a^2(x-\alpha)^2=0,$$

sau ordonînd în raport cu parametrul α, avem

$$\alpha^2(x^2+y^2-a^2)+4\alpha a^2 x+a^2(a^2-x^2)=0.$$

Rezultă că înfășurătoarea este cuartica circulară

$$(x^2+y^2-a^2)(x^2-a^2)+4a^2x^2=0$$

sau

$$(x^2+a^2)^2+y^2(x^2-a^2)=0.$$

Această cuartică este simetrică în raport cu axele de coordonate; ea este în întregime cuprinsă între asimptotele

$$x-a=0,\ x+a=0$$

și intersectează axa y în punctul A și în simetricul A_1 al acestui punct în raport cu punctul O. Ea este tangentă în aceste două puncte la cercul (Γ) de centru O și de raza OA.

38. *Față de un sistem de axe carteziene ortogonale xOy se consideră elipsa (E) și parabola (Π), de ecuații*

$$(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0;\ (\Pi):\ y^2=zpx.$$

Fie M un punct oarecare pe o conică (Γ) și (d) polara lui față de elipsa (E). Să se arate că locul geometric al punctului P al dreptei (d) față de parabola (Π) este o conică (Γ'). Să se discute conica (Γ') după natura conicei (Γ).

Soluție.

Considerăm conica (Γ) de ecuație

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \qquad (1)$$

și fie $M(\alpha, \beta)$ un punct pe ea. Polara lui față de elipsa (E) are ecuația

$$(d):\qquad \frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1=0. \qquad (2)$$

Fie acum $P(x_1, y_1)$ un punct în plan, a cărui polară față de parabola (Π) este

$$yy_1=p(x+x_1). \qquad (3)$$

Scriind că dreptele (2) și (3) sînt identice obținem coordonatele polului dreptei (d) față de parabola (Π):

$$x_1=-\frac{a^2}{\alpha},\ y_1=-\frac{pa_1\beta}{b^2x}. \qquad (4)$$

Scoțînd din aceste relații pe α și β și scriind că verifică ecuația (1), obținem ecuația locului geometric al polului dreptei (d) față de parabola (Π):

$$(\Gamma'): p^2a_{33}x^2 + 2a_{23}b^2pxy + a_{22}b^4y^2 - 2a_{13}a^2p^2x - 2a_{12}a^2b^2py + a_{11}a^4p^2 = 0.$$

Deci, locul geometric căutat este o conică. (5)

Notînd cu Δ invariantul cubic al conicei (Γ) și cu Δ' invariantul corespunzător al conicei (Γ), avem relația

$$\Delta' = a^4b^4p^4\Delta,$$

deci conicele (Γ) și (Γ') degenerează în același timp.

39. *Fie V un vîrf real al unei hiperbole și P_1, P_2 cele două puncte în care o paralelă la axa focală intersectează hiperbola.*

Să se găsească forma hiperbolei pentru care dreptele P_1V și P_2V sînt perpendiculare.

Soluție.

Fie o hiperbolă de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

un vîrf $V(a,o)$ și o dreaptă paralelă cu axa focală $y=k$.

Cele două puncte P_1 și P_2 sînt deci

$$P_i\left(\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2+k^2}, k\right), \quad (i=1,2).$$

Coeficienții unghiulari ai celor două drepte P_iV sînt

$$m_1 = \frac{kb}{(a\sqrt{b^2+k^2}-b)}, \quad m_2 = -\frac{kb}{a(\sqrt{b^2+k^2}-b)}.$$

Notînd cu θ unghiul dintre cele două drepte, avem

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{2a\sqrt{b^2+k^2}}{k(a^2-b^2)}\right|.$$

Dacă $P_1V \perp P_2V$ avem $a^2=b^2$, deci hiperbola este echilateră.

Vom da acum o demonstrație directă a acestei proprietăți, deci vom demonstra că dacă hiperbola este echilateră, dreptele P_1V și P_2V sînt perpendiculare.

Fie deci hiperbola echilateră

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

un vîrf al ei $V(a,o)$ și o dreaptă paralelă cu axa focală $y=k$.

Cele două puncte P_1 și P_2 sînt

$$P_i(\pm\sqrt{a^2+k^2}, k), \quad (i=1,2).$$

Dacă notăm cu M punctul de intersecție al dreptei (d) cu axa Oy. avem

$$MP_1=MP_2=MV=\sqrt{a^2+k^2}.$$

Rezultă că punctul V se află pe semicercul de diametru P_1P_2 și deci dreptele P_1V și P_2V sînt perpendiculare.

40. *Fie un punct O în plan și o dreaptă (d) care nu trece prin O. Se consideră familia de cercuri care trec prin O și fie M și N punctele în care un astfel de cerc intersectează dreapta (d).*

Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor din familia (F) în cazul în care dreptele OM și ON formează un unghi constant.

Soluție.

Raportăm figura la un sistem de coordonate care are originea în O și axa Ox paralelă cu dreapta (d).

Ecuația dreptei (d) este deci

$$(d): y=a,$$

iar ecuația familiei (F) de cercuri

$$(F): x^2+y^2-2\lambda x-2\mu y=0. \tag{1}$$

Abscisele x_1 și x_2 ale punctelor M și N sînt soluțiile ecuației

$$x^2-2\lambda x+a(a-2\mu)=0). \tag{2}$$

Ecuațiile dreptelor OM și ON sînt

$$(OM): y=\frac{a}{x_1}x; (ON): y=\frac{a}{x_2}x.$$

Dacă notăm cu θ unghiul dintre aceste două drepte avem

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{a\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right)}{1+\frac{a^2}{x_1x_2}}$$

sau

$$\operatorname{tg}^2\theta=\frac{a^2(x_1-x_2)^2}{(x_1x_2+a^2)^2}.$$

Avînd în vedere ecuația (2), deducem

$$\operatorname{tg}^2\theta=\frac{\lambda^2+2a\mu-a^2}{a^2-2a\mu+\mu^2}.$$

Centrul cercului (1) având coordonatele λ, μ, rezultă că locul geometric căutat are ecuația

$$\frac{a^2+2ay-a^2}{y^2-2ay+a^2}=\operatorname{tg}^2\theta,$$

sau

$$\cos^2\theta\cdot x^2-\sin^2\theta\cdot y^2+2ay-a^2=0. \qquad (3)$$

Deci, locul geometric este o conică.

Calculînd invarianții δ și Δ ai acestei conice, găsim

$$\delta=-\frac{1}{4}\sin 2\theta,\quad \Delta=-a^2\cos^4\theta.$$

Dacă $\theta=\frac{\pi}{2}$ avem $\delta=\Delta=0$ și conica (1) degenerează în dreapta $y=a$ luată de două ori, deci în dreapta (d).

Dacă $\theta=0$ avem $\delta=0$, $\Delta=-a^2$, deci conica (1) este o parabolă.

$$x^2+2ay-a^2=0,$$

a cărei axă este axa Oy, iar vîrful în $V\left(0,\frac{a}{2}\right)$.

Dacă $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ avem $\delta<0$, $\Delta<0$, și conica este o hiperbolă.

Ecuația (3) se poate scrie

$$\frac{x^2}{\frac{a^2\sin^2\theta}{\cos^4\theta}}+\frac{\left(y-\frac{a}{\sin^2\theta}\right)^2}{\frac{a^2}{\cos^2\theta}}-1=0.$$

Deci, hiperbola are centrul în $C\left(0,\frac{a}{\sin^2\theta}\right)$, semiaxele $\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}$, $\frac{a}{\cos\theta}$, având ca axă transversă axa Oy.

41. *Fie AA_1 o coardă a unui cerc, O mijlocul ei și M polul său față de cerc.*

Dacă se construiește o parabolă având ca focar punctul O și a cărei directoare trece prin M, tangentele la parabolă în punctele de intersecție ale cercului cu parabola trec prin punctele A, respectiv A_1.

Soluție.

Originea fiind punctul O, fie

$$x^2+y^2-2ax-c^2=0$$

ecuația cercului și

$$a^2(x+\lambda y)^2+2ac^2\lambda(y-\lambda x)-\lambda^2c^4=0$$

ecuația parabolei, unde este o cantitate arbitrară.

Pentru ecuațiile celor două coarde comune găsim

$$a(a+\lambda c)x+a(\lambda a-c)y+c^2(a+\lambda c)=0,$$
$$a(a-\lambda c)x+a(\lambda a+c)y+c^2(a-\lambda c)=0.$$

Aceste drepte sînt polarele, în raport cu parabola, ale punctelor A respectiv A_1, care au coordonatele $x=0$, $y=c$; $x=0$, $y=-c$.

Tangentele la această curbă în punctele unde ea intersectează cercul trec deci prin punctele A și A_1.

42. Fie o parabolă (P) și un cerc (C), ale căror ecuații în coordonate carteziene ortogonale sînt

$$y^2-2ax-4a^2=0, \tag{1}$$
$$x^2+y^2-4a^2=0. \tag{2}$$

Dintr-un punct A luat pe axa Oy se duc tangentele AN și AN' la cercul (1) și AM, AM' la parabola (2).

1° Să se demonstreze că fiecare din dreptele MN, MN', $M'N$, MN' trec printr-un punct t fix, cînd punctul A descrie axa Oy.

2° Prin punctele M, M', N, N' trece o conică (Γ) care admite axa Oy ca axă de simetrie. Să se găsească ecuația acestei conice.

3° Să se găsească numărul și natura conicelor (Γ) care trec printr-un punct dat din plan, după pozițiile acestui punct.

Soluție.

1° Notăm cu α ordonata punctului A. Coordonatele punctelor M și M' verifică ecuația cercului și aceea a polarei punctului A față de cerc,

$$\alpha y-4a^2=0,$$

adică sînt

$$M\left(\frac{2ar}{\lambda}, \frac{4a^2}{\lambda}\right),\ M'\left(-\frac{2ar}{\lambda}, \frac{4a^2}{\lambda}\right),$$

unde am notat $r=\sqrt{\lambda^2-4a^2}$.

În același mod obținem

$$N\left|\frac{r}{a}(r+\lambda), r+\lambda\right|,\ N'\left[\frac{r}{a}(r-\lambda), \lambda-r\right].$$

Ecuația dreptei MN este

$$\frac{y-\frac{4a^2}{\lambda}}{x-\frac{2ar}{\lambda}}=\frac{r+\lambda-\frac{4a^2}{\lambda}}{\frac{r(r+\lambda)}{a}-\frac{2ar}{\lambda}}$$

sau, ținînd seama că $r^2=\lambda^2-4a^2$,

$$(r+\lambda)y-2a(x+2a)=0.$$

Deci, dreapta MN trece prin punctul fix $R(-2a, 0)$.

Ecuația dreptei MN' este

$$(3\lambda+r)y-2a(x+6a)=0,$$

deci dreapta MN' trece prin punctul fix $S(-6a, 0)$.

În mod analog se obține că dreapta $M'N$ trece prin punctul S, iar $M'N'$ prin R.

2° Ecuația conicelor trecînd prin punctele N, N' este

$$y^2-2ax-4a^2+(\lambda y-ax-4a^2)(lx+my+n)=0.$$

Această conică este simetrică în raport cu Oy dacă coeficienții lui xy și x sînt nuli, deci dacă

$$l\lambda-ma=0,\ 2+n+4al=0. \tag{1}$$

Pentru ca conica să treacă prin punctele M și M' trebuie ca

$$\frac{16a^4}{\lambda^2}-\frac{4a^2r}{\lambda}-4a^2-\frac{2a^2r}{\lambda^2}(2arl+4a^2m+n\lambda)=0 \tag{2}$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă

$$l=-\frac{1}{a},\ m=-\frac{\lambda}{a^2},\ n=2.$$

Deci, conica (Γ) are ecuația

$$a^2(y^2-2ax-4a^2)-(\lambda y-ax-4a_2)\ (ax+y-2a^2)=0,$$

sau

$$a^2x^2+(a^2-\lambda^2)\ y^2+6a^2\lambda y-12a^4=0.$$

3° Scriind că conica trece prin punctul $T(x_0,\ y_0)$, obținem ecuația

$$\lambda^2y^2-6a^2\lambda y+a^2\ (12a^2-x^2-y^2)=0,$$

deci prin fiecare punct din plan trec două astfel de conice. Conicele sînt reale dacă ecuația are rădăcini reale, deci dacă

$$x^2+y^2-3a^2\geqslant 0.$$

Avem deci conice reale dacă punctul T este interior cercului cu centrul în origine și cu raza $a\sqrt{3}$.

Conica este elipsă, hiperbolă sau parabolă, după cum $a^2-\lambda^2$ este pozitiv, negativ sau nul.

43. Se consideră două parabole raportate la un sistem de axe rectangulare Ox, Oy:

$$y^2-2px=0,\ x^2-2qy+\lambda=0.$$

1° Să se determine λ astfel încît cele două parabole să fie tangente.

2° Care este locul geometric al punctelor M de contact ale celor două parabole, dacă p și q variază astfel încît produsul pq să fie constant.

3° Care sînt locurile geometrice ale punctelor de contact ale tangentelor comune celor două parabole diferite de tangenta în M.

Soluție.

1° Pentru ca cele două parabole să fie tangente trebuie ca ele să aibă un punct comun $M\ (\alpha, \beta)$ și tangentele în acest punct la cele două curbe să aibă același coeficient unghiular.

Coeficienții unghiulari ai tangentelor la cele două parabole în punctul M sînt $\frac{p}{\beta}$, $\frac{\alpha}{q}$. Deci, ecuațiile căutate sînt

$$\beta^2 - 2p\alpha = 0, \alpha^2 - 2q\beta + \lambda = 0, \alpha\beta = pq. \quad (1)$$

Eliminînd pe α, β între aceste trei ecuații obținem valoarea lui λ:

$$\lambda = 3q\sqrt[3]{\frac{p^2q}{4}}. \quad (2)$$

2° Dacă notăm cu k valoarea constantă a produsului pq, ecuația locului geometric căutat rezultă din ultima ecuație (1):

$$xy = k,$$

deci este o hiperbolă echilaterală avînd axele de coordonate ca asimptote.

3° Exprimînd că tangenta într-un punct x, y la una din cele două parabole este tangentă la cealaltă parabolă, se obțin două sisteme de ecuații de condiție

$$y^2 - 2px = 0, \quad p^2q^2 - \lambda y^2 + 2pqxy = 0$$

și

$$x^2 - 2qy + \lambda = 0, \quad pq^2 - 2\lambda x + 2qxy = 0.$$

Eliminînd p, q, λ între ecuațiile fiecărui sistem și ecuațiile (2) și $pq = k$, obținem locurile geometrice $8xy + k = 0$ și $2xy + 7k = 0$ deci două hiperbole echilatere.

44. Se consideră un triunghiu ABC circumscris unui cerc fix. Să se găsească locul geometric al ortocentrului acestui triunghiu cînd dreapta BC rămîne fixă, iar A descrie o dreaptă (d). Să se considere în particular cazul în care (d) este paralelă cu BC.

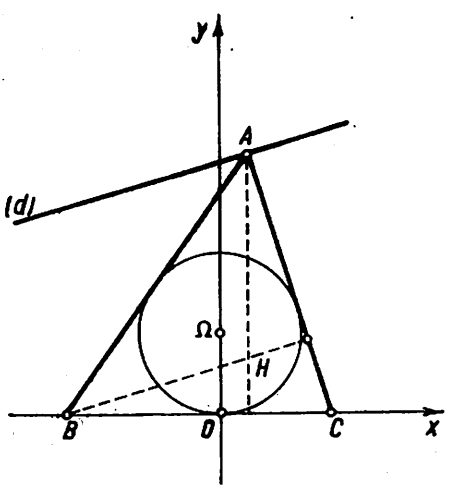


Figura 13

Soluție.

Raportăm figura la un sistem de axe formate din dreapta BC, ca axă Ox și din perpendiculara coborîtă din centrul Ω al cercului ABC, ca axă Oy (fig. 13).

Notînd cu $\Omega\,(O, r)$ centrul cercului, ecuația lui este

$$x^2 + y^2 - 2ry = 0. \quad (1)$$

Dreapta (d) are ecuația

$$(d): y=mx+n.$$

Vîrfurile triunghiului sînt deci $A(\alpha, m\alpha+n)$, $B(\beta, 0)$, $C(\gamma, 0)$.

Ecuația tangentelor duse din B la cercul (1) este

$$(\beta x-ry)^2-\beta^2(x^2+y^2-2ry)=0$$

sau

$$y[2\beta rx-(r^2-\beta^2)y-2\beta^2 r]=0.$$

Deci, dreapta AB are ecuația

$$2\beta rx-(r^2-\beta^2)y-2\beta^2 r=0.$$

Scriind că această dreaptă trece prin A, obținem

$$2r\alpha\beta+\alpha(\beta^2-r^2)-2r\beta^2=0. \tag{2}$$

Analog, pentru punctul C găsim

$$2r\alpha\gamma+\alpha(\gamma^2-r^2)-2r\gamma^2=0. \tag{2'}$$

Scăzînd relațiile (2), (2'), deducem

$$\beta+\gamma=-\frac{2r\alpha}{m\alpha+n-2r}. \tag{3}$$

Adunînd aceleași relații, obținem

$$\beta\gamma=-\frac{r^2(m\alpha+n)}{m\alpha+n-2r}. \tag{3'}$$

Ecuația înălțimii coborîte din A pe BC este $x=\alpha$, iar a perpendicularei coborîte din B pe AC este

$$y=\frac{\gamma-\alpha}{m\alpha+n}(x-\beta).$$

Deci, ortocentrul triunghiului ABC are coordonatele

$$x=\alpha y,\ =\frac{\alpha(\beta+\gamma)-\beta\gamma-\alpha^2}{m\alpha+n}. \tag{4}$$

Eliminînd pe α, β, γ între ecuațiile (3), (3') și (4), obținem ecuația locului geometric

$$x^2+mxy+(n-2r)y-r_2=0.$$

Dacă $m\neq 0$, această ecuație reprezintă o hiperbolă.

Dacă $m=0$, deci dacă dreapta (d) este paralelă cu BC, locul geometric este parabola de ecuație

$$x^2=(2r-n)y+r^2.$$

45. *Se consideră parabola* (Π) *de ecuație*

$$y^2=8x+16,$$

față de un sistem de axe carteziene ortogonale xOy. Făcînd o translație de axe obținem sistemul de axe x'O'y', unde O' are coordonatele $-2,0$. *Scriind ecuația parabolei* (Π) *față de noile axe, să i se determine focarul, vîrful și directoarea.*

Fie (*t*) *tangenta la parabola* (Π) *cu coeficientul unghiular* λ. *Dacă A și B sînt punctele unde această tangentă intersectează axele Ox și Oy, să se determine parabola* (Π'), *tangentă la axele Ox, Oy în punctele A, B. Scriind ecuația parabolei* (Π') *în coordonatele x', y', să se determine axa ei de simetrie. Să se arate apoi că această axă rămîne tangentă la o parabolă* (Π'') *cînd* λ *variază.*

Soluție.

Pentru a trece de la sistemul de axe *xOy* la sistemul *x'O'y'* trebuie să facem translația

$$x'=x+2,\ y'=y. \tag{1}$$

Prin această translație ecuația parabolei (Π) se scrie

$$y'^2=8x',$$

deci focarul ei este punctul de coordonate $x'=2$, $y=0$, adică punctul O; vîrful parabolei are coordonatele $x'=0$, $y=0$, adică este punctul O'. Directoarea are ecuația $x'=-2$, adică $x=-4$.

Ecuația tangentei la parabola (Π) cu coeficientul unghiular λ este

$$\lambda^2x-\lambda y+2(\lambda^2+1)=0.$$

Această dreaptă intersectează axele de coordonate *Ox*, *Oy* în punctele $A\left|\frac{2(\lambda^2+1)}{\lambda},\ 0\right|$, $B\left|0,\ \frac{2(\lambda^2+1)}{\lambda}\right|$.

Fasciculul de conice tangente la axele *Ox*, *Oy* în punctele *A* și *B* are ecuația

$$kxy+[\lambda^2x-\lambda y+2(\lambda^2+1)]^2=0.$$

Scriind că această conică este o parabolă, obținem $k=4\lambda^2$, adică ecuația parabolei (Π) este

$$\lambda^4x^2+2\lambda^3x+\lambda^2y^2+4\lambda^2(\lambda^2+1)x-4\lambda(\lambda^2+1)y+4(\lambda^2+1)^2=0.$$

Aplicînd acestei parabole translația (1), obținem ecuația ei sub forma

$$(\lambda^2x'+\lambda y'-2)+8\lambda^2(x'-\lambda y')=0.$$

Sub această formă se vede că axa de simetrie a parabolei este dreapta

$$\lambda^2x'+\lambda y'-2=0. \tag{2}$$

Considerînd această ecuație ca o ecuație în λ și scriind că are rădăcini confundate, obținem

$$y'^2+8x'=0. \tag{3}$$

Deci, dreapta (2) rămîne tangentă la parabola (3) cînd variază. Această parabolă este simetrică cu parabola (Π) față de axa *O'y'*, adică față de dreapta $x=-2$.

Capitolul VII

Sfera şi cuadricele pe ecuaţii reduse

Sfera.

Ecuaţia sferei cu centrul în punctul $C\ (a,b,c)$ şi cu raza r este

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0. \tag{1}$$

Ecuaţia

$$x^2+y^2+z^2+2\alpha x+2\beta y+2\gamma z+\delta=0$$

reprezintă o sferă cu centrul în C $(-\alpha,-\beta,-\gamma)$ şi cu raza $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta}$.

Sfera (1) are următoarele reprezentări parametrice

$$x=a+r\cos\varphi\cos\theta,\ y=b+r\sin\varphi\cos\theta,\ z=c+r\sin\theta$$

şi

$$x=a+\frac{2ur}{1+u^2+v^2},\ y=b+\frac{2vy}{1+u^2+v^2},\ z=c+\frac{(1-u^2-v^2)r}{1+u^2+v^2}.$$

Planul tangent la sfera (1) în punctul $M(x_0, y_0, z_0)$ de pe sferă are ecuaţia

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)+(z_0-c)(z-c)-r^2=0. \tag{2}$$

Dacă punctul M nu este pe sferă, planul (2) este planul polar al punctului M faţă de sfera (1).

Fiind date sferele

$$(\Sigma_1): x^2+y^2+z^2+2\alpha_1 x+2\beta_1 y+2\gamma_1 z+\delta_1=0,$$

$$(\Sigma_2): x^2+y^2+z^2+2\alpha_2 x+2\beta_2 y+2\gamma_2 z+\delta_2=0,$$

planul lor radical are ecuaţia

$$2(\alpha_1-\alpha_2)x+2(\beta_1-\beta_2)y+2(\gamma_1-\gamma_2)z+\delta_1-\delta_2=0.$$

Fasciculul de sfere cu sferele de bază (Σ_1) şi (Σ_2) are ecuaţia

$$\Sigma_1+\lambda\Sigma_2=0.$$

Dacă notăm cu θ unghiul sferelor Σ_1 şi Σ_2 avem

$$\cos\theta=\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2-\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2)}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2-\delta_1}\ \sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2-\delta_2}}.$$

Sferele Σ_1 şi Σ_2 sînt ortogonale dacă

$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=\frac{1}{2}(\delta_1\delta_2).$$

Elipsoidul.

Ecuaţia elipsoidului raportat la axele sale este

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0. \tag{3}$$

Elipsoidul are următoarele reprezentări parametrice

$$x=a\cos\varphi\cos\theta,\ y=b\sin\varphi\cos\theta,\ z=c\sin\theta$$

$$x=\frac{2au}{1+u^2+v^2},\ y=\frac{2bv}{1+u^2+v^2},\ z=\frac{c\,(1-u^2+v^2)}{1+u^2+v^2}.$$

Planul tangent la elipsodul (3) în punctul $M(x_0, y_0, z_0)$ de pe elipsoid are ecuaţia

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}-1=0.$$

Dacă M nu este situat pe elipsoid acest plan este planul polar al punctului M faţă de elipsodul (3).

Dacă două din semiaxele a, b, c sînt egale, elipsoidul este de rotaţie.

Hiperboloidul cu pînză.

Ecuaţia hiperboloidului cu o pînză raportat la axele sale este

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0. \tag{4}$$

Dacă $a=b$, hiperboloidul este de rotaţie.

Hiperboloidul (4) are două sisteme de generatoare rectilinii

$$(G_\lambda):\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right),\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

$$(G_\mu):\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right),\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{y}{b}\right).$$

Planul tangent la hiperboloidul (4) în punctul $M(x_0, y_0, z_0)$ situat pe el are ecuaţia

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\frac{z_0z}{c^2}-1=0.$$

Dacă M nu este situat pe hiperboloid, acest plan este planul polar al lui M față de hiperboloid.

Hiperbolodiul (4) admite un con asimptotic a cărui ecuație este

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Hiperboloidul cu două pînze.

Ecuația hiperboloidului cu două pînze raportat la axele sale este

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0. \tag{5}$$

Dacă $b=c$, hiperboloidul este de rotație.

Planul tangent la hiperboloidul (5) în punctul $M(x_0, y_0, z_0)$ situat pe el are ecuația

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}-\frac{z_0z}{c^2}-1=0.$$

Dacă M nu este situat pe hiperboloid, acest plan este planul polar al lui M față de hiperboloid.

Hiperboloidul (5) admite un con asimptotic de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Paraboloidul eliptic .

Paraboloidul eliptic raportat la axele sale are ecuația

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q}=2z. \tag{6}$$

Dacă $p=q$, paraboloidul este de rotație .

Planul tangent în punctul $M(x_0, y_0, z_0)$ de pe paraboloid are ecuația

$$\frac{x_0x}{p^2}+\frac{y_0y}{q^2}=z+z_0.$$

Dacă M nu este situat pe paraboloid, acest plan este planul polar al lui M față de paraboloid.

Paraboloidul hiperbolic.

Ecuația paraboloidului hiperbolic raportat la axele sale este

$$\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=2z. \tag{7}$$

Acest paraboloid are două sisteme de generatoare rectilinii :

$$(G_\lambda): \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=2\lambda z,\ \frac{x}{p}-\frac{y}{q}=\frac{1}{\lambda},$$

$$(G_\mu): \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=\mu,\ \frac{x}{p}-\frac{y}{q}=\frac{2z}{\mu}.$$

Planul tangent al punctului $M(x_0, y_0, z_0)$ de pe paraboloid are ecuaţia

$$\frac{x_0x}{p^2} - \frac{y_0y}{q^2} = z + z_0.$$

Dacă M nu este situat pe paraboloid, acest plan este planul polar al lui M faţă de paraboloid.

Probleme

1. *Faţă de un sistem de axe ortogonale $Oxyz$, se consideră familia de sfere definită de ecuaţia*

$$(\lambda+\mu)(x^2+y^2+z^2)+2\sqrt{2}a(\lambda-\mu)x-2a(\lambda\mu+1)y- \\ -2a(\lambda\mu-1)z-2a^2(\lambda-\mu)-b(\lambda+\mu)=0, \qquad (1)$$

unde a şi b sînt constante, iar λ şi μ parametri.

Se cere:

1° *Să se arate că sferele (1) sînt ortogonale unei sfere fixe.*

2° *Să se determine locul geometric al centrului sferelor (1) cînd λ şi μ variază.*

3° *Făcînd să varieze unul singur dintre parametrii λ şi μ, sferele (1) astfel obţinute trec printr-un cerc care generează o suprafaţă, cînd variază celălalt parametru.*

Soluţie.

1° Fie o sferă de ecuaţie

$$x^2+y^2+z^2+2\alpha_1x+2\alpha_2y+2\alpha_3z+\alpha_4=0.$$

Pentru ca această sferă să fie ortogonală tuturor sferelor (1) trebuie ca

$$\frac{\sqrt{2}a(\lambda^2-\mu)\alpha_1}{\lambda+\mu} - \frac{a(\lambda\mu+1)\alpha_2}{\lambda+\mu} - \frac{a(\lambda\mu-1)\alpha_3}{\lambda+\mu} - \frac{1}{2}\left[\alpha_4 - \frac{2a^2(\lambda-\mu)+b(\lambda+\mu)}{\lambda+\mu}\right]=0,$$

pentru oricare valori ale parametrilor λ şi μ.

Această relaţie se mai poate scrie

$$2a(\alpha_2+\alpha_3)\lambda\mu-(2\sqrt{2}a\alpha_1-\alpha_4+2a^2+b)\lambda+(2\sqrt{2}a\alpha_1-\alpha_4- \\ -2a_2+b)\mu+2a(\alpha_2-\alpha_3)=0.$$

Deci aici rezultă

$$2\sqrt{2}a\alpha_1-\alpha_4+2a^2+b=0,\ 2\sqrt{2}a\alpha_1-\alpha_4-2a^2+b=0, \\ \alpha_2+\alpha_3=0,\ \alpha_2-\alpha_3=0$$

adică

$$\alpha_1=-\frac{a\sqrt{2}}{2},\ \alpha_2=\alpha_3=0,\ \alpha_4=b.$$

Deci, sferele (1) sînt ortogonale sferei

$$x^2+y^2+z^2-a\sqrt{2}x+b=0.$$

2° Coordonatele centrului sferei (1) sînt

$$x=-\frac{\sqrt{2}a(\lambda-\mu)}{\lambda+\mu},\quad y=\frac{a(\lambda\mu+1)}{\lambda+\mu},\quad z=\frac{a(\lambda\mu-1)}{\lambda+\mu}.$$

Eliminînd pe λ și μ între aceste trei relații, obținem

$$x^2+y^2-z^2=2a^2,$$

care reprezintă ecuația locului geometric al sferelor (1). Acest loc geometric este un hiperboloid cu o pînză, de rotație, avînd axa Oz ca axă de rotație.

3° Păstrînd parametrul μ constant, sferele (1) formează un fascicul, și anume

$$\lambda(x^2+y^2+z^2+2\sqrt{2}ax-2a\mu y-a\mu z-2a^2-b)+\mu(x^2+y^2+z^2)-$$
$$-2\sqrt{2}a\mu x-2ay+2az+2a^2\mu-b\mu=0.$$

Aceste sfere trec prin intersecția sferelor

$$x^2+y^2+z^2+2\sqrt{2}ax-2a\mu y-2a\mu z-2a^2-b=0,$$

$$\mu(x^2+y^2+z^2)-2\sqrt{2}a\mu x-2ay+2az+2a^2\mu-b\mu=0$$

Aceste două sfere se intersectează după cercul

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2+2\sqrt{2}ax-2a\mu y-2a\mu z-2a^2-b=0,\\ 2\sqrt{2}\mu x+(1-\mu^2)y-(1+\mu^2)z-2a\mu=0.\end{cases}\qquad(2)$$

Pentru a găsi ecuația suprafeței generate de acest cerc cînd μ variază, trebuie să eliminăm pe μ între ecuațiile (2).

Obținem astfel ecuația

$$(x^2+y^2+z^2-b)^2-4a^2(2x^2+y^2-z^2-2\sqrt{2}ax+a^2)=0,$$

care reprezintă o suprafață bicirculară de gradul al patrulea.

2. Se dă o elipsă și un punct M în planul său. Să se găsească locul geometric al vîrfurilor conurilor care trec prin elipsă, una din axele de simetrie ale acesteia trecînd prin punctul M.

Soluție.

Luăm ca axe de coordonate axele elipsei și perpendiculara dusă prin origine. Ecuația elipsei este

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,\quad z=0.$$

Ecuația conului care are ca directoare elipsa și ca vîrf punctul $V(x_1, y_1, z_1)$ este

$$\frac{(xz_1-zx_1)^2}{a^2}+\frac{(yz_1-zy_1)^2}{b^2}-(z-z_1)^2=0.$$

Dreapta VM este o axă dacă ea este perpendiculară pe diametrul conjugat, adică avem

$$\frac{x_1-\alpha}{\frac{z_1}{a^2}[(x_1-\alpha)z_1-z_1x_1]}=\frac{y_1-\beta}{\frac{z_1}{b^2}[(y_1-\beta)z_1-z_1y_1]}=$$

$$=-\frac{z_1}{\frac{z_1}{a^2}[(x_1-\alpha)z_1-z_1x_1]+\frac{y_1}{b^2}[(y_1-\beta)z_1-{}_1y_1]+z_1}$$

Presupunînd pe z_1 diferit de zero, rezultă

$$\frac{x_1-\alpha}{\frac{\alpha}{a^2}}=\frac{y_1-\beta}{\frac{\beta}{b^2}}=-\frac{-z_1^2}{\frac{ax_1}{a^2}+\frac{\beta y_1}{b^2}-1}=\frac{x_1(x_1-\alpha)+y_1(y_1-\beta)+z_1^2}{1}.$$

Locul vîrfului V este deci intersecţia planului

$$\frac{x-\alpha}{\frac{\alpha}{a^2}}=\frac{y-\beta}{\frac{\beta}{b^2}}$$

cu sfera

$$x^2+y^2+z^2-\alpha x-\beta y=\frac{a^2}{\alpha}(x-x),$$

adică un cerc situat într-un plan perpendicular pe planul xOy.

3. *Fiind dată un plan* (π) *şi două sfere* (S), (S_1) *de rază* R *şi* R_1, *avînd centrele lor în acest plan, se consideră o sferă variabilă* (Σ) *tangentă sferelor şi planului. Se cere:*

1° Locul geometric al punctului de contact al sferelor (Σ) cu planul dat.

2° Locul geometric al centrului sferei (Σ).

Soluţie.

1° Luăm axa Ox ca linia centrelor sferelor (S) şi (S_1), ca axă Oy perpendiculara dusă în planul (π) pe Ox şi ca axă Oz perpendiculară în O pe planul (π).

Notînd cu a şi a_1 abscisele centrelor celor două sfere şi prin x, y, z coordonatele centrului sferei (Σ). avem:

$$(x-a)^2+y^2+z^2=(R\pm z)^2,\quad (x-a_1)^2+y^2+z^2=(R_1\pm z)^2$$

Dacă considerăm pe z cu semn pozitiv şi pe R, R_1 pozitiv sau negative, aceste ecuaţii se pot scrie sub forma:

$$(x-a)^2+y^2-R^2=2Rz, \tag{1}$$

$$(x-a_1)^2+y^2-R=2R_1z. \tag{2}$$

Ecuația locului geometric al punctului de contact al sferei (Σ) cu planul se obține, eliminînd pe z între ecuațiile (1) și (2). Rezultă

$$R[(x-a_1)^2+y^2-R_1^2]-R_1[(x-a)^2+y^2-R^2=0$$

sau

$$(R-R_1)(x^2+y^2)-2(a_1R-aR_1)x+Ra_1^2-R_1a^2+RR_1(R-R_1)=0. \quad (3)$$

Această ecuație reprezintă un cerc, iar dacă schimbăm R_1 cu $-R_1$ se obține un al doilea cerc.

Luînd ca origine punctul pentru care avem $aR_1=Ra_1$, adică unul din centrele de omotetie al celor două sfere, ecuația (3) devine

$$x^2+y^2=a\ a_1-R\ R_1$$

Locul geometric căutat se compune deci din două cercuri avînd ca centre centrele de omotetie ale sferelor (S), (S_1) și ale căror raze sînt

$$\frac{\sqrt{RR_1[d^2-(R-R_1)^2]}}{R-R_1} \text{ și } \frac{\sqrt{RR_1[(R+R_1)^2-d^2]}}{R+R_1}$$

unde am notat cu d distanța dintre centrele sferelor (S) și (S_1).

Cele două cercuri sînt reale cînd sferele sînt secante.

Aceste cercuri au aceeași axă radicală ca cercurile mari ale sferelor (S) și (S_1).

2° Locul geometric al centrului sferei (Σ) este definit de ecuațiile (1) și (2) sau de (3) și ecuația obținută scăzînd ecuațiile (1) și (2). Această ultimă ecuație se scrie

$$2(a-a_1)x-2(R-R_1)z+(a_1^2-R_1^2)-(a^2-R^2)=0 \quad (4)$$

și reprezintă un plan trecînd prin axa radicală a cercurilor mari, după care planul dat intersectează sferele (S) și (S_1).

Acest plan intersectează cilindrul drept reprezentat de ecuația (3) după o elipsă.

Locul geometric căutat se compune din patru elipse care sînt intersecțiile celor doi cilindri (3) prin cele două plane (4). Aceste patru elipse sînt două cîte două simetrice în raport cu planul dat.

4. *Să se arate ca sferele care intersectează două sfere fixe, sub unghiuri constante, sînt tangente la două sfere fixe.*

Soluție.

Fie

$$x^2+y^2+z^2+2\ ax+c=0, \quad (1)$$

$$x^2+y^2+z^2+2\ a_1x+c=0, \quad (2)$$

două sfere avînd ca plan radical planul yz, și

$$x^2+y^2+z^2+2\ \alpha x+2\beta y+2\gamma z+\delta=0 \quad (3)$$

o a treia sferă oarecare. Fie

$$x^2+y^2+z^2+2\,a\,x+c+\lambda\,(x^2+y^2+z^2+2\,a_1\,x+c)=0$$

o sferă aparţinînd sistemul determinat de primele două şi tangentă la cea de a treia. Valorile lui λ sînt determinate de ecuaţia

$$4\,(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta)\left[\frac{(a+a_1\,\lambda)^2}{(1+\lambda)^2}-c\right]=\left[\frac{2\,\alpha\,(a+a_1\,\lambda)}{1+\lambda}-\delta-c\right]^2$$

sau

$$[4(a_1^2-c)\,(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta)-(2\,\alpha\alpha_1-\delta-c)^2]\lambda^2+2[4(a_1a-$$
$$-c)\,(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta)-2(\alpha\,a-\delta-c)\,(2\,\alpha\alpha_1-\delta-c)]\,\lambda+$$
$$+4(a^2-c)\,(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta)-2(\alpha\alpha-\delta-c)^2=0.$$

Dacă notăm cu R_1, R_2, ρ razele sferelor (1), (2), (3), cu d distanţa centrelor sferelor (1) şi (2), cu δ_1 distanţa centrelor (1) şi (3) şi cu δ_2 distanţa centrelor sferelor (2) şi (3), această ecuaţie se scrie

$$[4R_2\rho^2-(R_2-\rho^2-\delta_2^2)^2]\lambda^2+2\,[2\rho^2(R_1^2+R_2^2-d^2)-(R_1^2+\rho^2-$$
$$-\delta_1^2)(R_2^2+\rho^2-\delta_2^2)]\lambda+4R_1^2\,\rho^2-(R_1^2+\rho^2-\delta_1^2)^2=0.$$

Dacă θ este unghiul sferelor (1) şi (3), θ_1 cel al sferelor (2) şi (3) şi φ cel al sferelor (1) şi (2), avem

$$\delta_1^2=R_1^2+\rho^2+2R_1\,\rho\,\cos\,\theta,\quad \delta_2^2=R_2^2+\rho^2+2R_2\,\rho\,\cos\,\theta_1,\quad d^2=R_1^2+R_2^2+$$
$$+2R_1R_2\cos\,\varphi.$$

Deci, ecuaţia în λ devine

$$\lambda^2\,R_2^2\,\sin^2\,\theta_1+2\,\lambda\,R_1\,R_2\,(\cos\,\varphi-\cos\,\theta\,\cos_1)+R^2\,\cin^2\,\theta=0.$$

Observăm că valorile lui λ nu depind de raza ρ, ci numai de unghiurile θ şi θ_1.

Rezultă de aici că dacă sfera (3) intersectează sferele (1) şi (2) sub unghiuri constante, ea este tangentă la două sfere fixe, avînd acelaşi plan radical ca sferele (1) şi (2).

Se poate de asemenea găsi locul geometric al sferelor care intersectează sferele (1) şi (2) sub unghiuri constante.

Acest loc geometric este un hiperboloid de revoluţie în jurul axei focale, care este axa x. Cele două focare sînt centrele celor două sfere care intersectează toate sferele variabile.

5° Să se arate că sferele care intersectează trei sfere fixe sub acelaşi unghi au centrele în acelaşi plan şi trec prin două puncte fixe.

Soluţie.

Fie

$$(x-a_i)^2+(y-b_i)^2+z^2=R_i^2,\quad (i=1,2,3)$$

ecuațiile celor trei sfere fixe al căror centre sînt situate în planul xOy, iar

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\rho^2$$

ecuația unei sfere variabile care intersectează primele trei sfere sub același unghi θ. Avem

$$(\alpha-a_1)^2+(\beta-b_1)^2+\gamma^2=R_1^2+\rho^2+2R_1\ \rho\cos\theta,$$

$$(\alpha-a_2)^2+(\beta-b_2)^2+\gamma^2=R_2^2+\rho^2+2R_2\ \rho\cos\theta,$$

$$(\alpha-a_3)^2+(\beta-b_3)^2+\gamma^2=R_3^2+\rho^2+2R_3\ \rho\cos\theta,$$

deci

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2a_1\alpha-2b_1\beta+a_1^2+b_1^2-R_1^2-\rho^2}{R_1}=$$

$$=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2a_2\alpha-2b_2\beta+a_2^2+b_2^2-R_2^2-\rho^2}{R_2}=$$

$$=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2a_3\alpha-2b_3\beta+a_3^2+b_3^2-R_3^2-\rho^2}{R_3}=\lambda.$$

Obținem locul geometric al centrelor sferelor variabile eliminînd pe ρ^2 și λ între aceste trei ecuații, adică

$$\begin{vmatrix} 1 & R_1 & R_1^2-a_1^2-b_1^2+2a_1\alpha+2b_1\beta-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \\ 1 & R_2 & R_2^2-a_2^2-b_2^2+2a_2\alpha+2b_2\beta-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \\ 1 & R_3 & R_3^2-a_3^2-b_3^2+2a_3\alpha+2b_3\beta-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \end{vmatrix}=0.$$

sau

$$\begin{vmatrix} 1 & R_1 & R_1^2-a_1^2-b_1^2+2a_1\alpha+2b_1\beta \\ 1 & R_2 & R_2^2-a_2^2-b_2^2+2a_2\alpha+2b_2\beta \\ 1 & R_3 & R_3^2-a_3^2-b_3^2+2a_3\alpha+2b_3\beta \end{vmatrix}=0.$$

Înlocuind cu α, β, γ cu coordonatele curente x, y, z, locul geometric căutat este

$$\begin{vmatrix} 1 & R_1 & R_1^2-a_1^2-b_1^2+2a_1x+2b_1y \\ 1 & R_2 & R_2^2-a_2^2-b_2^2+2a_2x+2b_2y \\ 1 & R_3 & R_3^2-a_3^2-b_3^2+2a_3x+2b_3y \end{vmatrix}=0.$$

Locul geometric este un plan perpendicular pe planul centrelor celor trei sfere.

6. Fiind dat un sistem de axe rectangulare $Oxyz$, luăm punctele A pe Ox, B pe Oy și C pe Oz.

1° Să se scrie ecuația generală a sferelor (S) care trec prin cele trei puncte.

2° Fie I centrul uneia din aceste sfere și I_0 centrul sferei (S_0) circumscrisă tetraedrului $OABC$ și H proiecția lui O pe planul ABC. Să se arate că puterea lui O în raport cu (S) este egală cu $2\,OH \cdot I_0I$.

3° Să se arate că sfera (S_1), care admite ca cerc mare cercul circumscris triunghiului ABC, intersectează după un cerc mare sfera (Σ) cu centru în O și cu raza OH.

4° Să se arate că sfera (S_2), care este ortogonală în A, B, C, la (S_0), intersectează după un cerc mare sfera (Σ_1), care are centrul în O și este tangentă la (S_0).

Soluție.

1° Să notăm $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$. Sferele (S) pot fi considerate ca aparținînd fasciculului definit de planul ABC și de sfera (S_0). Ecuația sferei (S_0) este

$$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0, \tag{1}$$

iar ecuația planului ABC este

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0. \tag{2}$$

Ecuația generală a sferelor (S) este deci

$$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz+\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1\right)=0, \tag{3}$$

unde λ este un parametru care reprezintă puterea originei în raport cu sfera (S).

2° Coordonatele centrului I al sferei (3) sînt

$$\xi=\frac{1}{2}\left(a+\frac{\lambda}{a}\right),\quad \eta=\frac{1}{2}\left(b+\frac{\lambda}{b}\right),\quad \tau=\frac{1}{2}\left(c+\frac{\lambda}{c}\right). \tag{4}$$

Cînd λ variază, acest punct descrie o dreaptă de parametri directori $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$, perpendiculara pe planul ABC. Dacă orientăm această dreaptă prin cosinusurile directoare $\frac{1}{ap},\frac{1}{bp},\frac{1}{cp}$, unde am notat cu

$$p=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}, \tag{5}$$

mărimea vectorului $\overrightarrow{I_0I}$, ținînd seama că I_0 este obținut pentru valoarea $\lambda=0$, este $\overrightarrow{I_0I}=\frac{\lambda p}{2}$.

Pe de altă parte, dacă notăm $h=\overline{OH}$, coordonatele lui H sînt $\frac{h}{ap}, \frac{h}{bp}, \frac{h}{cp}$. Scriind că ele verifică relația (2), rezultă

$$\frac{h}{p}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=1,$$

sau, ținînd seama de relația (5), $h=\frac{1}{p}$.

Avem deci $\overline{2I_0I}\cdot\overline{OH}=\lambda$.

3° Să scriem că punctul I se găsește în planul ABC, *adică*

$$\frac{\xi}{a}+\frac{\eta}{b}+\frac{\zeta}{c}-1=0$$

sau

$$\lambda\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+1=0,$$

de unde

$$\lambda=-\frac{1}{p^2}=-h^2=-\overline{OH}^2.$$

Deci, punctul O are aceeași putere în raport cu cele două sfere (S_1) și (Σ), adică se găsește în planul lor radical. Deoarece acest plan este de asemenea planul cercului de intersecție al celor două sfere, acesta este un cerc mare al lui (Σ).

4° Condiția ca sferele (1) și (3) să fie ortogonale este

$$\frac{1}{2}\left[a\left(a+\frac{\lambda}{a}\right)+b\left(b+\frac{\lambda}{b}\right)+c\left(c+\frac{\lambda}{c}\right)\right]=\lambda,$$

sau

$$\lambda=-(a^2+b^2+c^2).$$

Pe de altă parte, raza lui (Σ) este egală cu diametrul lui (S_0) și anume este egală cu $2OI_0=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, iar pătratul acestei raze este $-\lambda$. Deci, punctul O are aceeași putere în raport cu (S_2) și cu (Σ_1), adică se află în planul radical al acestor sfere. Acest plan, trecînd prin centrul sferei (Σ_1), o intersectează după un cerc mare.

7. Se dă ecuația unui elipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

Să se găsească ecuația normalei în punctul $P(\alpha, \beta, \gamma)$ al elipsoidului și coordonatele celui de al doilea punct de intersecție al normalei cu suprafața.

Soluţie.

Ecuaţia planului tangent la elipsoid în punctul P este

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}-1=0,$$

unde avem

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1=0, \qquad (1)$$

Normala la elipsoid are deci ecuaţia

$$\frac{a^2(x-\alpha)}{\alpha}=\frac{b^2(y-\beta)}{\beta}=\frac{c^2(z-\gamma)}{\gamma}.$$

Notînd cu ρ valoarea comună a acestor rapoarte, găsim

$$x=\alpha+\frac{\alpha\rho}{a^2},\ y=\beta+\frac{\beta\rho}{b^2},\ z=\gamma+\frac{\gamma\rho}{c^2}. \qquad (2)$$

Înlocuind aceste valori în ecuaţia elipsoidului, obţinem

$$\frac{\left(\alpha+\frac{\alpha\rho}{a^2}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\beta+\frac{\beta\rho}{b^2}\right)^2}{b^2}+\frac{\left(\gamma+\frac{\gamma\rho}{c^2}\right)^2}{c^2}-1=0,$$

sau, ţinînd seama de relaţia (1),

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^6}+\frac{\beta^2}{b^6}+\frac{\gamma^2}{c^6}\right)\rho^2+2\left(\frac{\alpha^2}{a^4}+\frac{\beta^2}{b^4}+\frac{\gamma^2}{c^4}\right)\rho=0.$$

Această ecuaţie ne dă valorile lui ρ corespunzătoare celor două puncte de intersecţie ale normalei cu elipsoidul. Pentru $\rho=0$ avem punctul P, iar pentru

$$\rho=-\frac{2\left(\frac{\alpha^2}{a^4}+\frac{\beta^2}{b^4}+\frac{\gamma^2}{c^4}\right)}{\frac{\alpha^2}{a^6}+\frac{\beta^2}{b^6}+\frac{\gamma^2}{c^6}}$$

avem cel de-al doilea punct de intersecţie al normalei cu elipsoidul.

Înlocuind această valoare a lui ρ în relaţiile (2), obţinem

$$x_1=\frac{\alpha\beta^2}{b^4}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{2}{a^2}\right)+\frac{\alpha\gamma^2}{c^4}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{2}{a^2}\right),$$

$$y_1=\frac{\beta\gamma^2}{c^4}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{2}{b^2}\right)+\frac{\alpha^2}{a^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{2}{b^2}\right),$$

$$z_1=\frac{\gamma\alpha^2}{a^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{2}{c^2}\right)+\frac{\gamma\beta^2}{b^4}\left(\frac{2}{b^2}-\frac{2}{c^2}\right).$$

8. Să se determine ecuaţiile axelor unei secţiuni plane oarecare ale unui elipsoid.

Soluție.

Ecuația elipsoidului este

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

Dacă prin centru se duce un plan paralel cu secțiunea dată, axele celor două secțiuni vor fi paralele. Este deajuns, deci, să formăm ecuația pătratică a celor două plane, trecînd prin axele secțiunii centrale și prin diametrul conjugat al planului său.

Fie $lx+my+nz=0$ secțiunea centrală; dacă notăm cu $(x'\ y'\ z')$ coordonatele unui punct al uneia dintre axele sale, axa perpendiculară pe aceasta este în planul $xx'+yy'+zz'=0$ și de asemenea în planul diametral conjugat al celui dintîi, adică

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=0.$$

Deoarece, pe de altă parte, $lx'+my'+nz'=0$, eliminarea lui $x'\ y'\ z'$ între cele trei ecuații omogene care se vor scrie, vor da relația următoare între coordonatele unui punct oarecare al uneia dintre axe

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ x & y & z \\ \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} \end{vmatrix}=0$$

sau

$$lyz\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+mzx\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)+nxy\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0. \qquad (1)$$

Ecuațiile planelor care trec prin diametrul $\frac{x}{a^2l}=\frac{y}{b^2m}=\frac{z}{c^2n}$ și prin axele secțiunii centrale, intersecțiile conului (1) și planului $lx+my+nz=0$, se vor obține considerînd aceste plane ca un cilindru ale cărui generatoare pot fi reprezentate prin relațiile

$$x=x_1+a^2l\rho, \quad y=y_1+b^2m\rho, \quad z=z_1+c^2n\rho,$$

x_1, y_1, z_1 fiind coordonatele unui punct oarecare al suprafeței cilindrice. Rezultă

$$\frac{x^2}{a^2}(b^2-c^2)+\frac{y^2}{b^2}(c^2-a^2)+\frac{z^2}{c^2}(a^2-b^2)+$$
$$+yz\left[\frac{n}{m}\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)+\frac{m}{n}\left(\frac{a^2}{c^2}-1\right)-\frac{a^2l^2}{mn}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\right]+\ldots=0 \qquad (2)$$

(termenii nescriși se obțin prin permutări circulare aplicate literelor a, b, c, respectiv l, m, n).

Coeficientul lui yz se poate scrie

$$\frac{1}{mn}\left[a^2n^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+a^2m^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)+a^2l^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\right]$$

iar coeficienții lui zx și xy se deduc prin permutarea circulară a literelor a, b, c și l, m, n. În definitiv, ecuația pătratică care ne dă axele unei secțiuni oarecare paralelă cu planul $lx+my+nz=0$ este aceea a perechii de plane (2), care se poate scrie sub forma

$$\frac{x^2}{a^2}(b^2-c^2)+\frac{y^2}{b^2}(c^2-a^2)+\frac{z^2}{c^2}(a^2-b^2)-2a^2l^2\frac{yz}{mn}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)-$$

$$-2b^2m^2\frac{zx}{nl}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)-2c^2n^2\frac{xy}{lm}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+$$

$$+\left[l^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+m^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)+n^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right]\left(\frac{a^2yz}{mn}+\frac{b^2zx}{nl}+\frac{c^2xy}{lm}\right)=0.$$

9. *Să se arate că proiecțiile ortogonale ale unui punct fix al unui elipsoid pe trei plane diametrale conjugate oarecare, determină un plan care trece printr-un punct fix.*

Soluție.

Ecuația elipsoidului este

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0. \qquad (1)$$

Fie $M(\alpha, \beta, \gamma)$ punctul fix și $M_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $M_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $M_3(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ extremitățile a trei diametre conjugate.

Coordonatele proiecției punctului M pe planul diametral conjugat primului diametru sînt date de ecuațiile

$$\frac{x-\alpha}{\frac{\alpha_1}{a^2}}=\frac{y-\beta}{\frac{\beta_1}{b^2}}=\frac{z-\gamma}{\frac{\gamma_1}{c^2}}=\frac{(x-\alpha)\frac{\alpha_1}{a^2}+(y-\beta)\frac{\beta_1}{b^2}+(z-\gamma)\frac{\gamma_1}{c^2}}{\frac{\alpha_1^2}{a^4}+\frac{\beta_1^2}{b^4}+\frac{\gamma_1^2}{c^4}}=$$

$$=-\frac{\frac{\alpha\alpha_1}{a^2}+\frac{\beta\beta_1}{b^2}+\frac{\gamma\gamma_1}{c^2}}{\frac{\alpha_1^2}{a^4}+\frac{\beta_1^2}{b^4}+\frac{\gamma_1^2}{c^4}}.$$

Dacă notăm cu x_1, y_1, z_1 aceste coordonate și punem

$$\lambda_1=\frac{\alpha_1^2}{a^4}+\frac{\beta_1^2}{b^4}+\frac{\gamma_1^2}{c^4},\quad \mu_1=\frac{\alpha\alpha_1}{a^2}+\frac{\beta\beta_1}{b^2}+\frac{\gamma\gamma_1}{c^2},$$

avem

$$x_1=\alpha-\frac{\mu_1}{\lambda_1}\frac{\alpha_1}{a^2},\quad y_1=\beta-\frac{\mu_1}{\lambda_1}\frac{\beta_1}{b^2},\quad z_1=\gamma-\frac{\mu_1}{\lambda_1}\frac{\gamma_1}{c_1}.$$

În mod analog se obțin coordonatele proiecțiilor punctului M pe celelalte două plane diametrale.

Avînd în vedere că punctele M_1, M_2, M_3 sînt pe elipsoidul (1), deci coordonatele lor verifică această ecuație, rezultă

$$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3=\alpha(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{a^2}\left[\frac{\alpha}{a^2}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)+\right.$$

$$\left.+\frac{\beta}{b^2}(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)+\frac{\gamma}{c^2}(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3)\right]=\alpha(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)-\frac{\alpha}{a^2}$$

și

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}{a^4}+\frac{\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2}{b^4}+\frac{\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2}{c^4}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Deci, putem scrie, notînd suma $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ prin $\frac{1}{d^2}$,

$$\frac{\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}=\alpha-\frac{\alpha d^2}{a^2}=x',$$

$$\frac{\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2+\lambda_3 y_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}=\beta-\frac{\beta d^2}{b^2}=y',$$

$$\frac{\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_3 z_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}=\gamma-\frac{\gamma d^2}{c^2}=z'.$$

Rezultă că planul considerat trece prin punctul fix care are coordonatele x', y', z'.

Avem

$$\frac{x'-\alpha}{\frac{\alpha}{a^2}}=\frac{y'-\beta}{\frac{\beta}{b^2}}=\frac{z'-\gamma}{\frac{\gamma}{c^2}}=-d^2,$$

deci punctul fix este situat pe normala în M la elipsoid.

10. *Să se găsească la ce condiție trebuie să satisfacă secțiunea plană a unui elipsoid pentru ca pe această secțiune să se găsească trei puncte, astfel încît normalele în aceste puncte să fie concurente.*

Soluție.

Ecuația elipsoidului este

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

Coordonatele punctelor de intersecție ale celor șase normale duse la elipsoid prin punctul P (x_1, y_1, z_1) se obțin înlocuind în formulele

$$x=\frac{a^2 x_1}{\lambda+a^2},\quad y=\frac{b^2 y_1}{\lambda+b^2},\quad z=\frac{c^2 z_1}{\lambda+c^2}$$

pe λ prin rădăcinile ecuației

$$f(\lambda)=\frac{a^2x_1^2}{(\lambda+a^2)^2}+\frac{b^2y_1^2}{(\lambda+b^2)^2}+\frac{c^2z_1^2}{(\lambda+c^2)^2}-1=0. \qquad (1)$$

Fie (π) planul care trece prin picioarele celor trei normale și (π') planul care trece prin picioarele celorlalte trei normale. Notăm cu (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ coordonatele polilor planelor (π) și (π'); trei din rădăcinile ecuației $f(\lambda)=0$ sînt în acest caz rădăcinile ecuației

$$\frac{\alpha a_1}{\lambda+a^2}+\frac{\beta y_1}{\lambda+b^2}+\frac{\gamma z_1}{\lambda+c^2}-1=0,$$

iar celelalte trei ale ecuației

$$\frac{\alpha' x_1}{\lambda+a^2}+\frac{\beta' y_1}{\lambda+b^2}+\frac{\gamma' z_1}{\lambda+c^2}-1=0.$$

De aici rezultă că cele șase rădăcini ale ecuației (1) sînt rădăcinile ecuației

$$F(\lambda)=\left(\frac{\alpha x_1}{\lambda+a^2}+\frac{\beta y_1}{\lambda+b^2}+\frac{\gamma z_1}{\lambda+c^2}-1\right)\left(\frac{\alpha' x_1}{\lambda+a^2}+\frac{\beta' y_1}{\lambda+b^2}+\frac{\gamma' z_1}{\lambda+c^2}-1\right)=0.$$

Indentificînd aceste două ecuații obținem relațiile următoare:

$$\alpha\alpha'=-a^2,\quad \beta\beta'=-b^2,\quad \gamma\gamma'=-c^2,$$

$$\frac{\alpha\beta'+\beta\alpha'}{b^2-a^2}y_1+\frac{\alpha\gamma'+\gamma\alpha'}{c^2-a^2}z_1=\alpha+\alpha',$$

$$\frac{\beta\gamma'+\gamma\beta'}{c^2-b^2}z_1+\frac{\beta\alpha'+\alpha\beta'}{a-b^2}x_1=\beta+\beta',$$

$$\frac{\gamma\alpha'+c\gamma}{a^2-c^2}x_1+\frac{\gamma\beta'+\beta\gamma'}{b^2-c^2}y_1=\gamma+\gamma',$$

Eliminînd între aceste ecuații pe α', β', γ', obținem

$$\begin{cases}\dfrac{b^2\alpha^2+a^2\beta^2}{b^2-a^2}\cdot\dfrac{y_1}{\beta}+\dfrac{c^2\alpha^2+a^2\gamma^2}{c^2-a^2}\cdot\dfrac{z_1}{\gamma}=a^2-\alpha^2,\\ \dfrac{c^2\beta+b^2\gamma^2}{c^2-b^2}\cdot\dfrac{z_1}{\gamma}+\dfrac{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}{a^2-b^2}\cdot\dfrac{x_1}{\alpha}=b^2-\beta^2,\\ \dfrac{a^2\gamma'+c^2\alpha^2}{a^2-c^2}\cdot\dfrac{x_1}{\alpha}+\dfrac{b^2\gamma^2+c^2\beta^2}{b^2-c^2}\cdot\dfrac{y_1}{\beta}=c^2-\gamma^2.\end{cases} \qquad (2)$$

Avînd în vedere că determinantul sistemului este nul, pentru ca acest sistem să fie compatibil trebuie ca

$$\frac{b^2\gamma^2+c^2\beta^2}{b^2-c^2}(a^2-a^2)+\frac{c^2\alpha^2-a^2\gamma^2}{c^2-a^2}(\beta^2-b^2)+\frac{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}{a^2-b^2}(\gamma^2-c^2)=0.$$

Pentru că polul (α, β, γ) al planului (π) este pe o suprafață de gradul al patrulea reprezentată de ecuația (3), ecuațiile (2), unde

considerăm (x_1, y_1, z) drept coordonate curente, se reduc la două și reprezintă o dreaptă (D).

Dacă din fiecare punct al acestei drepte ducem normale la elipsoid, punctul de intersecție a trei dintre ele va fi în planul (π) și celelalte trei într-un alt plan (π') al cărui pol are coordonatele

$$\alpha' = -\frac{a^2}{\alpha}, \quad \beta' = -\frac{b^2}{\beta}, \quad \gamma' = -\frac{c^2}{\gamma}.$$

Planul (π') trece prin proiecțiile, pe axele elipsoidului, ale punctului simetric polului planului (π), în raport cu centrul elipsoidului. Ecuația sa este

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} + 1 = 0.$$

11. *Fie A și B două puncte pe o elipsă și C punctul de intersecție al tangentelor la elipsă în A și B.*

Să se afle locul geometric al punctelor din spațiu, de unde se văd laturile triunghiului ABC sub unghiuri drepte.

Soluție.

Raportăm figura la sistemul de axe ortogonale, care are originea în centrul elipsei și ca axe Ox și Oy axele elipsei.

Ecuația elipsei este așadar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad z = 0,$$

iar punctele A și B sînt $A(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$, $B(a\cos\theta, b\sin\theta)$, unde $\varphi - \theta \neq k\pi$, căci în caz contrar cele două tangente la elipsă în A și B ar fi paralele.

Tangentele la elipsă în A și B au ecuațiile

$$\frac{\cos\varphi}{a}x + \frac{\sin\varphi}{b}y - 1 = 0, \quad \frac{\cos\theta}{a}x + \frac{\sin\theta}{b}y - 1 = 0$$

și se întîlnesc în punctul

$$C\left(\frac{a\cos\frac{\varphi+\theta}{2}}{\cos\frac{\varphi-\theta}{2}}, \frac{b\sin\frac{\varphi+\theta}{2}}{\cos\frac{\varphi-\theta}{2}}\right).$$

Fie $M(X, Y, Z)$ punctul din spațiu de unde se văd laturile triunghiului ABC sub unghiuri drepte.

Dreptele MA și MB au parametrii directori.

$$(MA) : X - a\cos\varphi, \; Y - b\sin\varphi, \; Z,$$

$$(MB) : X - a\cos\theta, \; Y - b\sin\theta, \; Z.$$

Condiţia ca dreptele MA şi MB să fie perpendiculare este

$$(X-a\cos\varphi)(X-a\cos\theta)+(Y-b\sin\varphi)(Y-b\sin\theta)+Z^2=0. \quad (1)$$

Analog, condiţiile ca dreptele MA şi MC, respectiv MB şi MC, să fie perpendiculare

$$\begin{cases} (X-a\cos\varphi)\left(X-\dfrac{a\cos\frac{\varphi+\theta}{2}}{\cos\frac{\varphi-\theta}{2}}\right)+(Y-b\sin\varphi)\left(Y-\dfrac{b\sin\frac{\varphi+\theta}{2}}{\cos\frac{\varphi-\theta}{2}}\right)+Z^2=0, \\ (X-a\cos\theta)\left(X-\dfrac{a\cos\frac{\varphi+\theta}{2}}{\cos\frac{\varphi-\theta}{2}}\right)+(Y-b\sin\theta)\left(Y-\dfrac{b\sin\frac{\varphi+\theta}{2}}{\cos\frac{\varphi-\theta}{2}}\right)+Z^2=0. \end{cases} \quad (2)$$

Eliminînd între ecuaţiile (1) şi (2) parametrii φ şi θ, obţinem ecuaţia locului geometric căutat

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y}{b^2}+\frac{Z^2}{a^2+b^2}-1=0.$$

Deci, locul geometric este un elipsoid raportat la axele de coordonate şi care are drept secţiune cu planul xOy, elipsa dată.

12. *Din toate punctele unei drepte* $\frac{x}{l}+\frac{y}{m}+\frac{z}{n}$ *se duc asimptote la un hiperboloid cu o pînză*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Să se găsească locul geometric al acestor asimptote.

Soluţie.

Fie (x_1, y_1, z_1) un punct în spaţiu. Asimptotele duse prin acest punct la suprafaţă sînt asimptotele secţiunii paralele cu planul diametral conjugat cu dreapta care uneşte centrul hiperboloidului cu acest punct. În adevăr, să ducem prin punctul (x_1, y_1, z_1) o dreaptă

$$x=x_1+\alpha\rho,\quad y=y_1+\beta\rho,\quad z=z_1+\gamma\rho. \quad (1)$$

Pentru a găsi intersecţia acestei drepte cu hiperboloidul trebuie să rezolvăm ecuaţia

$$\rho^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}\right)+2\rho\left(\frac{\alpha x_1}{a^2}+\frac{\beta z_1}{a^2}-\frac{\gamma z_1}{c^2}\right)+\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}=0.$$

Făcînd aici substituţia $\rho=\frac{1}{\sigma}$, obţinem ecuaţia

$$\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{z_1^2}{c^2}\right)\sigma^2+2\left(\frac{\alpha x_1}{a^2}+\frac{\beta y_1}{b^2}-\frac{\gamma z_1}{x^2}\right)\sigma+\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}=0.$$

Dreapta (1) este o asimptotă a hiperboloidului dacă această ecuație are două rădăcini nule, adică dacă

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}=0 \text{ și } \frac{\alpha x_1}{a^2}+\frac{\beta y_1}{b^2}-\frac{\gamma z_1}{c^2}=0,$$

sau, avînd în vedere ecuațiile (1),

$$\frac{(x-x_1)^2}{a^2}+\frac{(y-y_1)^2}{b^2}-\frac{(z-z_1)^2}{c^2}=0$$

și

$$(x-x_1)\frac{x_1}{a^2}+(y-y_1)\frac{y_1}{b^2}-(z-z_1)\frac{z_1}{c^2}=0.$$

Acestea sînt ecuațiile care determină asimptotele; vom avea locul geometric căutat prin eliminarea lui x_1, y_1, z_1, λ între aceste ecuații și ecuațiile $x_1=\lambda l$, $y_1=\lambda m$, $z_1=\lambda n$. Obținem ecuația

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}\right)=\left(\frac{lx}{a^2}+\frac{my}{b^2}-\frac{nz}{c^2}\right)^2,$$

care reprezintă o pereche de plane.

13. *Se dă hiperboloidul cu o pînză*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

Se consideră două generatoare (D_1) *și* (D_2), *din același sistem, ale căror picioare pe planul elipsei de gît sînt la capetele unui același diametru.*

1° *Să se găsească ecuația dreptei* (Δ), *perpendiculara comună a lui* (D_1) *și* (D_2).

2° *Să se găsească suprafața generată de* (Δ).

3° *Să se găsească pe această suprafață locul punctelor pentru care planele tangente fac un unghi dat* Θ *cu planul elipsei de gît. Să se construiască proiecțiile acestui loc pe planele de coordonate.*

Soluție.

1° Notînd prin φ un parametru variabil, ecuațiile generatoarelor (D_1) și (D_2) sînt

$$(D_1):\ \frac{x}{a}=\frac{z}{c}\cos\varphi-\sin\varphi,\quad \frac{y}{b}=\frac{z}{c}\sin\varphi-\cos\varphi;$$

$$(D_2):\ \frac{x}{a}=-\frac{z}{c}\cos\varphi+\sin\varphi,\quad \frac{y}{b}=\frac{z}{c}\sin\varphi-\cos\varphi.$$

Ecuațiile perpendicularei lor comune sînt

$$\begin{cases} acx\cos\varphi+cby\sin\varphi+z(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)-c(a^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi=0, \\ acx\cos\varphi+cby\sin\varphi-z(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)+c(a^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi=0. \end{cases}$$

Prin adunare şi scădere deducem

$$(\Delta):\begin{cases} ax\cos\varphi + by\sin\varphi = 0, \\ z(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi) - c(a^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi = 0. \end{cases} \quad (1)$$

2° Prin eliminarea parametrului φ între ecuaţiile (1), se obţine ecuaţia suprafeţei generată de dreapta (Δ):

$$abz\,(x^2+y^2) + c\,(a^2-b^2)\,xy = 0. \quad (2)$$

Deci, locul geometric căutat este o suprafaţă cubică. Această suprafaţă se numeşte conoidul lui Plücker.

3° Notînd cu Θ unghiul pe care-l face normala într-un punct la această suprafaţă cu axa Oz, avem

$$\cos\Theta = \frac{a^2b^2(x^2+y^2)^2}{a^2b^2(x^2+y^2)^2 + 4a^2b^2z^2(x^2-y^2) + c^2(a^2-b^2)^2(x^2+y^2) - 8abc(a^2-b^2)xyz}$$

Se înlocuieşte în această expresie produsul xy cu valoarea sa scoasă din ecuaţia (2) şi se obţine

$$a^2b^2\operatorname{tg}^2\Theta\,(x^2+y^2) + 4\,a^2b^2z^2 - c^2(a^2-b^2) = 0, \quad (3)$$

care reprezintă o suprafaţă de gradul al doilea de rotaţie în jurul axei Oz. Curba este intersecţia acestei suprafeţe cu suprafaţa (2), deci este o curbă de gradul al şaselea.

Pentru a obţine ecuaţia proiecţiei sale pe planul xOy se scoate din ecuaţia (1) valoarea lui z

$$abz = -\frac{c(a^2-b^2)xy}{x^2+y^2}$$

şi introducînd-o în ecuaţia suprafeţei (3) se obţine

$$a^2b^2\operatorname{tg}^2\theta(x^2+y^2)^3 - c^2(a^2-b^2)^2[(x^2+y^2)^2 - 4x^2y^2] = 0$$

sau trecînd în coordonate polare ρ şi ω,

$$\rho^2 = \frac{c^2(a^2-b^2)^2}{a^2b^2\operatorname{tg}^2\theta}\cos^2 2\omega.$$

Este ecuaţia unei rozete.

Proiecţia curbei pe planul yOx se obţine eliminînd pe x între ecuaţiile celor două suprafeţe, ceea ce nu reprezintă nici o dificultate. Se ajunge astfel la ecuaţia

$$16a^4b^4z^6 - a^2b^2c^2(a^2-b^2)^2(8z^4 - \operatorname{tg}^4\theta y^4) + 4a^2b^2c^2(a^2-b^2)^2\operatorname{tg}^2\theta y^2z^2 + \\ + c^4(a^2-b^2)^4(z^2 - \operatorname{tg}^2\theta y^2) = 0.$$

Este o ecuaţie de gradul al şaselea, avînd un punct dublu la origine şi toate direcţiile asimptotice paralele la axa Oy.

14. *Se dă un elipsoid raportat la un sistem de axe ortogonale.*
Se cere să se găsească ecuația unui hiperboloid având aceleași axe și astfel încît două secțiuni principale ale acestor suprafețe să aibă aceleași focare.

Soluție.

Ecuația elipsoidului este $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$. Ecuația unui hiperboloid având aceleași direcții ale axelor este

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}+\varepsilon=0,\ (\varepsilon=\pm 1).$$

Să presupunem că secțiunile principale considerate sînt situate în planele xOy și zOx.

Ecuațiile secțiunilor celor două suprafețe cu planul xOy sînt

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,\quad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\varepsilon=;$$

aceste elipse fiind omofocale trebuie să avem

$$\alpha^2=a^2+\lambda,\quad \beta^2=b^2+\lambda, \tag{1}$$

λ fiind un parametru variabil. De asemenea, rezultă $\varepsilon=-1$.

Intersectînd suprafețele cu planul zOx, obținem

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,\ \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}-1=0.$$

Pentru ca elipsa și hiperbola astfel determinate să fie omofocale trebuie să avem

$$\alpha^2=a+\mu,\quad \gamma^2=\mu-c^2, \tag{2}$$

μ fiind un parametru.

Ținînd seama de relațiile (1) și (2) obținem $\lambda=\mu$, deci ecuația hiperboloidului devine

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}-\frac{z^2}{-c^2}-1=0.$$

15. *Fiind dat un paraboloid eliptic (Γ), să se determine sferele care intersectează (Γ) după o pereche de cercuri.*

Soluție.

Putem, fără a micșora generalitatea problemei, să considerăm ca ecuație a paraboloidului

$$z=A^2x^2+B^2y^2,$$

unde A, B sînt două numere reale pozitive, de exemplu $A<B$.

Planele care dau secţiunile ciclice pe (Γ) sînt acelea avînd poziţia dată de dreptele aparţinînd la conicele degenerate din fasciculul

$$A^2x^2+B^2y^2+\lambda(x^2+y^2+z^2)=0,\ z=0.$$

Discriminantul conicei $A^2x^2+B^2y^2+\lambda(x^2+y^2+z^2)=0$ este $\Delta=(A^2+\lambda)(B^2+\lambda)\lambda$ şi se anulează pentru $\lambda=0, \lambda=-A^2, \lambda=-B^2$.

Secţiunile ciclice nedegenerate ale lui (Γ) se obţin (în corespondenţă cu $\lambda=-A^2$ şi $\lambda=-B^2$) pentru poziţiile planelor

$$(B^2-A^2)\ y^2-A^2z^2=0 \text{ adică } \sqrt{B^2-A^2}\,y=\pm Az \qquad (1)$$

şi

$$(A^2-B^2)\ x^2-B^2z^2=0 \text{ adică } \sqrt{A^2-B^2}\,y=\pm Bz. \qquad (2)$$

Avînd în vedere că $A<B$, rezultă că planele (2) sînt imaginare.

Ne ocupăm de una din poziţiile date de (1) ; pentru cealaltă poziţie (1) şi (2) se procedează în mod analog. Ne referim deci la poziţia planului

$$\sqrt{B^2-A^2}\,y-Az=0.$$

Planul $\sqrt{B^2-A^2}\,y-Az+h=0$ (unde h este un parametru) intersectează paraboloidul (Γ) după un cerc (C). Sferele trecînd prin cercul (C) se intersectează din nou după un alt cerc.

Dar cuadricele trecînd prin (C) au ecuaţii de forma

$$A^2x^2+B^2y^2-z+(ax+by+cz+d)\ (\sqrt{B^2-A^2}\,y-Az+h)=0, \qquad (3)$$

sferele aparţinînd sistemului (3) sînt acele pentru care

$$A^2=B^2+b\sqrt{B^2-A^2},\ A^2=cA,\ -aA=0,\ C\sqrt{B^2-A^2}-Ab=0,$$

de unde deducem $a=0,\ b=-\sqrt{B^2-A^2},\ C=-A$.

Sferele au deci ecuaţia

$$A^2(x^2+y^2+z^2)+(d-h)\sqrt{B^2-A^2}\,y-(1+dA+hA)z+hd=0. \qquad (4)$$

Se observă că sferele (4) depind de doi parametri h şi d şi că au centrul în planul $x=0$.

Pentru cealaltă poziţie (1) şi pentru poziţiile (2) se obţin ecuaţii analoage cu (4):

$$A^2(x^2+y^2+z^2)+(d-h)\sqrt{B^2-A^2}\,y-(1-dA-hA)z+hd=0, \qquad (4')$$

$$B^2(x^2+y^2+z^2)+(d-h)\sqrt{A^2-B^2}\,y-(1+dB+hB)z+hd=0, \qquad (5)$$

$$B^2(x^2+y^2+z^2)+(d-h)\sqrt{A^2-B^2}\,y-(1-dB-hB)z+hd=0. \qquad (5')$$

Sferele (4) şi (4') sînt reale, iar (5) şi (5') sînt imaginare.

16. *Față de un sistem de axe ortogonale Oxyz, se consideră paraboloidul hiperbolic*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

și două generatoare ale lui fixe (G_1), (G_2), *făcînd parte din același sistem. O generatoare variabilă* (Δ) *din celălalt sistem intersectează dreptele* (G_1) *și* (G_2) *în două puncte* P_1 *și* P_2.

Se cere:

1° Să se demonstreze că: pentru ca să existe un punct Ω, *de unde segmentul* P_1P_2 *să fie văzut sub un unghiu drept cînd* (Δ) *variază, este necesar și suficient ca dreptele* (G_1) *și* (G_2) *să fie perpendiculare. În acest caz locul geometric al punctului* Ω *este un cerc* (C_1).

2° Dacă dreptele (G_1) *și* (G_2) *variază, rămînînd perpendiculare, planul cercului* (C_1) *trece prntr-o dreaptă fixă* (D_1).

3° Schimbînd între ele cele două sisteme de generatoare, obținem în același mod un cerc (C_2) *și o dreapaă* (D_2). *Să se arate că dreptele* (D_1) *și* (D_2) *se intersectează într-un punct A.*

Soluție.

1° Generatoarele (G_1) și (G_2) au ecuațiile

$$(G_1): \frac{x}{a}+\frac{x}{b}=2\alpha_1 z, \quad \frac{x}{a}-\frac{x}{b}=\frac{1}{\alpha_1};$$

$$(G_2): \frac{x}{a}+\frac{x}{b}=2\alpha_2 z, \quad \frac{x}{a}-\frac{x}{b}=\frac{1}{\alpha_2},$$

iar generatoarea (Δ)

$$(\Delta): \frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{1}{\lambda}, \quad \frac{x}{a}-\frac{x}{b}=2\lambda z.$$

Intersectînd dreptele (Δ) și (G_1), respectiv (Δ) și (G_2), obținem cele două puncte P_1 și P_2:

$$P_1: \; x_1=\frac{a(\alpha_1+\lambda)}{2\alpha_1\lambda}, \quad y_1=\frac{b(\alpha_1-\lambda)}{2\alpha_1\lambda}, \quad z_1=\frac{1}{2\alpha_1\lambda};$$

$$P_2: \; x_2=\frac{a(\alpha_2+\lambda)}{2\alpha_2\lambda}, \quad y_2=\frac{b(\alpha_2-\lambda)}{2\alpha_2\lambda}, \quad z_2=\frac{1}{2\alpha_2\lambda}.$$

Pentru ca segmentul P_1P_2 să fie văzut din punctul $\Omega(x, y, z)$ sub un unghiu drept trebuie ca $\Omega P_1 \perp \Omega P_2$, adică

$$(X-x_1)(X-x_2)+(Y-y_1)(Y-y_2)+(Z-z_1)(Z-z_2)=0$$

sau

$$[2\alpha_1\lambda X - a(\alpha_1+\lambda)][2\alpha_2\lambda X - a(\alpha_2+\lambda)]+[2\alpha_1\lambda Y - b(\alpha_1-\lambda)][2\alpha_2\lambda Y - b(\alpha_2-\lambda)]+(2\alpha_1\lambda Z-1)(2\alpha_2\lambda Z-1)=0.$$

Această relaţie trebuie să aibă loc pentru orice generatoare, adică pentru orice λ, deci trebuie să avem

$$\begin{cases} (2\alpha_1 X - a)(2\alpha_2 X - a) + (2\alpha_1 Y + b)(2\alpha_2 Y + b) + 4\alpha_1\alpha_2 Z^2 = 0, \\ a\alpha_1(2\alpha_2 X - a) + a\alpha_2(2\alpha_1 X - a) + b\alpha_1(2\alpha_2 Y + b) + b\alpha_2(2\alpha_1 Y + b) + \\ \qquad + 2(\alpha_1 + \alpha_2)Z = 0, \\ (a^2 + b^2)\alpha_1\alpha_2 + 1 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Ultima relaţie a acestui sistem reprezintă tocmai condiţia ca dreptele (G_1) şi (G_2) să fie perpendiculare.

Dacă această relaţie este îndeplinită, atunci locul geometric al punctului Ω este determinat de primele două ecuaţii (2).

Aceste ecuaţii se mai pot scrie

$$C_1 : \begin{cases} 4\alpha_1\alpha_2(X^2 + Y^2 + Z^2) - 2(\alpha_1 + \alpha_2)(aX - bY) + a^2 + b^2 = 0, \\ 4\alpha_1\alpha_2(aX + bY) + 2(\alpha_1 + \alpha_2)Z - (\alpha_1 + \alpha_2)(a^2 - b^2) = 0. \end{cases}$$

Deci, locul geometric al punctului Ω este un cerc.

2° Avînd în vedere a treia relaţie (2), rezultă că planul cercului (C_1) se mai poate scrie

$$\frac{4}{a^2 + b^2}(aX + bY) - (\alpha_1 + \alpha_2)(2Z - a^2 + b^2) = 0,$$

deci cînd dreptele (G_1) şi (G_2) variază, rămînînd perpendiculare, planul cercului (C_1) formează un fascicul. Dreapta fixă a acestui fascicul este

$$(D_1) : aX - bY = 0, \; 2Z = a^2 - b^2$$

3° Cercul (C_2) are ecuaţii analoage cu (C_1).

Deci, planul cercului (C_2) trece prin dreapta fixă (D_2) de ecuaţii

$$(D_2) : aX - bY = 0, \quad Z = \frac{a^2 - b^2}{2}.$$

Dreptele (D_1) şi (D_2) se intersectează în punctul $A\left(O, O, \frac{a^2 - b^2}{2}\right)$

17. Fiind dat un paraboloid hiperbolic, se consideră o generatoare (G_1) a acestei suprafeţe şi generatoarea (G_2) a aceluiaşi sistem, care este perpendiculară pe pirma. Prin punctele A şi B, unde aceste drepte întîlnite de perpendiculara comună, trec două generatoare (G_1') şi (G_2') din celălalt sistem.

Fie A', B' punctele în care cele două drepte (G_1'), (G_2') sînt întîlnite de perpendiculara lor comună.

1° Să se găsească locul geometric al punctelor A şi B şi cel al punctelor A' şi B', cînd dreapta (G_1) descrie paraboloidul.

2° Să se găsească locul geometric al punctelor de intersecţie al dreptelor (G_1) şi $(G_2$ sau (G_1') şi (G_2').

Soluţie.

1° Fie

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x$$

ecuația paraboloidului. Ecuațiile generatoarelor (G_1) și (G_2) sînt

$$(G_1): \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=\alpha, \\ \frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=\frac{2x}{\alpha}, \end{cases} \quad (G_2): \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=\beta, \\ \frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{2x}{\beta}. \end{cases}$$

Aceste generatoare sînt perpendiculare dacă $p+q+\alpha\beta=0$.
Ecuația planului trecînd prin generatoarea (G_1) este

$$\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}-\alpha+\lambda\left(\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}-\frac{2x}{\alpha}\right)=0.$$

Acest plan este perpendicular pe planul director al generatoarelor (G_1) și (G_2), dacă avem $\frac{1+\lambda}{p}+\frac{1-\lambda}{q}=0$

sau $\lambda=\frac{p+q}{p-q}$.

Ecuația planului trecînd prin generatoarea comună (G_{11}) și prin perpendiculara comună AB este

$$y\sqrt{p}-z\sqrt{q}-(p+q)\frac{x}{\beta}-\frac{p-q}{2}\alpha=0,$$

iar ecuația planului trecînd prin generatoarea (G_2) și prin AB este

$$y\sqrt{p}-z\sqrt{q}-(p+q)\frac{x}{\alpha}-\frac{p-q}{2}\alpha=0.$$

Scăzînd aceste două ecuații, rezultă.

$$(p+q)\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}x-\frac{p-q}{2}(\alpha-\beta)=0,$$

sau înlocuind pe $\alpha\beta$ prin $-(p+q)$, deducem

$$x+\frac{p-q}{2}=0.$$

Această ecuație reprezintă locul geometric generat de dreapta AB, și intersecția acestui plan cu paraboidul reprezintă locul geometric al punctelor A și B. Deci locul geometric al punctelor A și B este hiperbola de ecuații

$$x+\frac{p-q}{2}=0, \quad \frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=q-p.$$

Generatoarea (G_1') are ecuațiile

$$(G_1'): \frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{2x}{\alpha_1}, \quad \frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=\alpha_1,$$

cu condiția $\alpha\alpha_1=q-p$, care exprimă că generatoarea trece prin punctul A.

Această condiţie ne arată că generatoarele (G_1) şi (G_1') sînt perpendiculare.

Generatoarea (G_2') are ecuaţiile analoage, unde în loc de α_1 este β_1,

$$\beta\beta_1 = q - p.$$

Se observă că avem $\alpha\beta\alpha_1\beta_1 = (q-p)^2$, deci

$$\alpha_1\beta_1 + \frac{(p-q)^2}{p+q} = 0.$$

Planele care determină dreapta $A'B'$ au ecuaţiile

$$y\sqrt{p} + z\sqrt{q} - (p+q)\frac{x}{\alpha_1} - \frac{p-q}{2}\alpha_1 = 0,$$

$$y\sqrt{p} + z\sqrt{q} - (p+q)\frac{x}{\beta_1} - \frac{p-q}{2}\beta_1 = 0.$$

Scăzînd aceste ecuaţii, împărţind cu $\alpha_1 - \beta_1$ şi înlocuind pe $\alpha_1\beta_1$ prin valoarea sa, se obţine ecuaţia locului geometric al dreptei $A'B'$,

$$x + \frac{(p-q)^2}{2(p+q)^2} = 0.$$

Locul geometric al punctelor A', B' este intersecţia acestui plan cu paraboloidul.

2° Să căutăm locul geometric al punctelor de intersecţie al dreptelor (G_1) şi (G_2').

Impărţind prima ecuaţie din (G_1) cu cea de a doua ecuaţie din (G_2'), rezultă

$$\frac{\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}}}{\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}}} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{p-q}{p+q},$$

sau

$$\frac{y}{p\sqrt{p}} + \frac{z}{q\sqrt{q}} = 0.$$

Locul geometric căutat este intersecţia acestui plan cu paraboloidul; se obţine o parabolă.

Această parabolă este şi locul geometric al punctelor de intersecţie a dreptelor (G_1') şi (G_2).

18. Să se găsească locul geometric al centrelor sferelor care trec printr-un punct dat şi determină pe o dreaptă fixă un segment de lungime constantă.

Soluție.

Luăm originea axelor în punctul fix prin care trebuie să treacă sferele și notăm cu d lungimea segmentului. Fie

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma} \tag{1}$$

ecuațiile dreptei date.

Ecuația generală a sferelor trecînd prin origine este

$$x^2+y^2+z^2-2\lambda x-2\mu y-2\nu z=0. \tag{2}$$

Notînd cu r valoarea comună a rapoartelor (1) și înlocuind pe x, y, z dați de (1) în (2), obținem ecuația care ne dă punctele de intersecție ale dreptei date cu sfera:

$$r^2+2[(a-\lambda)\cos\alpha+(b-\mu)\cos\beta+(c-\nu)\cos\gamma]r+$$
$$+a^2+b^2+c^2-2\lambda a-2\mu b-2\nu c=0.$$

Pentru ca segmentul determinat de sfera (2) pe dreapta (1) să aibă lungimea d trebuie ca diferența rădăcinilor ecuației (3) să fie egală cu d, adică

$$[(a-\lambda)\cos\alpha+(b-\mu)\cos\beta+(c-\nu)\cos\gamma]^2-$$
$$-[a^2+b^2+c^2-2\lambda a-2\mu b-2\nu c]=\frac{d^2}{4}.$$

Avînd în vedere că λ, μ, ν sînt coordonatele centrului sferei, rezultă că ecuația locului geometric căutat este

$$[(a-x)\cos\alpha+(b-y)\cos\beta+(c-z)\cos\gamma]^2+2ax+2by+$$
$$+2cz-a^2-b^2-c^2=\frac{d^2}{4},$$

adică ecuația unui cilindru.

19. Se consideră familia de cuadrice de ecuație

$$\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2+z^2}{\lambda+1}+1=0 \tag{1}$$

unde λ este un parametru.

1° *Să se studieze aceste cuadrice, cînd λ variază.*

2° *Să se determine suprafețele care înfășoară cuadricele (1)*

Soluție.

1° Vom scrie cuadricele (1) în coordonate omogene, deci sub forma

$$\frac{x_1^2}{\lambda}-\frac{x_2^2+x_3^2}{\lambda+1}+x_4^2=0, \tag{1'}$$

$$(\lambda+1)x_1^2-\lambda(x_2^2+x_3^2)+\lambda(\lambda+1)x_4^2=0. \tag{1''}$$

Dacă $\lambda=\pm\infty$, ecuația (1') devine $x_4^2=0$, deci reprezintă planul de la infinit luat de două ori.

Dacă $-\infty<\lambda<-1$, ecuația (1) reprezintă un hiperboloid cu două pînze.

Dacă $\lambda=-1$, ecuația (1'') devine $x_2^2+x_3^2=0$, deci reprezintă două plane imaginar conjugate, trecînd prin axa Ox, și anume

$$x_2\pm ix_3=0.$$

Dacă $-1<\lambda<0$, ecuația (1) reprezintă un elipsoid real.

Dacă $\lambda=0$, ecuația (1'') se scrie $x_1^2=0$, deci reprezintă planul yOz luat de două ori.

Dacă $0<\lambda<\infty$, ecuația (1) reprezintă un hiperboloid cu o pînză.

2° Pentru a găsi înfășurătoarea familiei de cuadrice, scriem ecuația (1) sub forma

$$F(x, y, z, \lambda)=\lambda^2+\lambda(x^2-y^2-z^2+1)+x^2=0. \tag{2}$$

Eliminăm pe λ între ecuațiile

$$F(x, y, z, \lambda)=0,\ F'_\lambda(x, y, z, \lambda)=0,$$

avem

$$F'_\lambda(x, y, z, \lambda)=2\lambda+x^2-y^2-z^2+1=0. \tag{3}$$

Scoțînd pe λ din ecuația (3) și înlocuind în (2), obținem

$$[(x-1)^2-y^2-z^2]\,[(x+1)^2-y^2-z^2]=0.$$

Deci, înfășurătoarea familiei de cuadrice (1) este formată din conurile

$$(\Gamma_1):\quad (x-1)^2-y^2-z^2=0;$$
$$(\Gamma_2):\quad (x+1)^2-y^2-z^2=0.$$

Conul (Γ_1) are vîrful în punctul C_1 (1,0,0) și ca axă o paralelă cu axa Ox trecînd prin C_1.

Conul (Γ_2) are vîrful în C_2 (−1,0,0) și ca axă o paralelă cu axa Ox trecînd prin C_2.

Capitolul VIII

Teoria generală a cuadricelor

Suprafețele date de o ecuație de gradul al doilea în variabilele x, y, z se numesc cuadrice.

Ecuația generală a cudricelor este, deci,

$$f(x, y, z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+ \\ +2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \qquad (1)$$

sau, în coordonatele omogene x_1, x_2, x_3, x_4,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=\sum_{i,j}^{1,4} a_{ij}\,x_i\,x_j,\ (a_{ij}=a_{ji}). \qquad (1')$$

Invarianții cuadricei (1) față de o transformare ortogonală de coordonate sînt

$$\Delta=\det|a_{ij}|,\ (i, j=1, 2, 3, 4)\ ;\ \delta=\det|a_{hk}|,\ (h,k=1, 2, 3),$$

$$I=a_{11}+a_{22}+a_{33}$$

$$J=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Tabela generală de discuție a cuadricei (1) este

Cuadrică nedegenerată $\Delta \neq 0$	Cu centru $\delta \neq 0$	$S_1 x^2+S_2 y^2+S_3 z^2+\frac{\Delta}{\delta}=0$	Elipsoid	imaginar ++++ / ++++ / real ++++
			Hiberboloid	cu o pînză ++−− / cu două pînze +−−−
	fără centru $\delta=0$		Paraboloid	eliptic ++ / hiperbolic +−
Cuadrică degenerată $\Delta=0$	Con pătratic $\delta \neq 0$	$S_1 x^2+S_2 y^2+S_3 z^2=0$		imaginar +++ / real ++−
	Cilindric sau puncte de plane			

unde S_1, S_2, S_3 sînt rădăcinile ecuației ei seculare

$$S^3 - IS^2 + JS - \delta = 0.$$

În ultima coloană a tabelului sînt trecute semnele coeficienților ecuațiilor reduse.

În cazul în care $\delta \neq 0$ cuadrica (1) are centru, ale cărui coordonate sînt soluția sistemului

$$\begin{cases} f_1 \equiv a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0, \\ f_2 \equiv a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0, \\ f_3 \equiv a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

Axele cuadricei sînt determinate de ecuațiile

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - Sx = 0\,; \quad \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - Sy = 0\,; \quad \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - Sz = 0,$$

în care înlocuim pe S cu S_1, S_2, S_3, iar $\varphi(x, y, z)$ reprezintă grupul termenilor de gradul al doilea din ecuația cuadricei.

Planul tangent la cuadrică în punctul $M(\alpha, \beta, \gamma)$ de pe cuadrică are ecuația

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}[x - \alpha] + \frac{\partial f}{\partial \beta}[y - \beta] + \frac{\partial f}{\partial \gamma}[z - \gamma] = 0.$$

Dacă M nu se află pe cuadrică, această ecuație reprezintă planul polar al punctului M față de cuadrică.

Conul pătratic al tangentelor duse din $M(x_1', x_2', x_3', x_4')$ la cuadrica (1') are ecuația

$$f[x', x]^2 - f[x_1, x_2, x_3, x_4] f[x_1' x_2', x_3', x_4'] = 0,$$

unde $f'(x', x)$ este forma dedublată (polară) a ecuației (1').

Ecuația conului asimtotic al cuadricei (1) este

$$\delta f(x, y, z) - \Delta = 0.$$

Planul diametral conjugat direcției (m_1, m_2, m_3) are ecuația

$$m_1 f_1 + m_2 f_2 + m_3 f_3 = 0,$$

unde f_1, f_2, f_3 au expresiile date de relațiile (2).

Ecuația tangențială a cuadricei (1) este

$$\sum_{i,j}^{1,4} A_{ij} U_i U_j = 0, \quad [A_{ij} = A_{ji}],$$

unde A_{ij} este complementul algebric al elementului a_{ij} din determinantul Δ.

Dacă $\varphi_h(x, y, z) = 0$ $(h = 1,2)$ sînt ecuațiile a două cuadrice, ecuația

$$f_1(x, y, z) + \lambda f_2(x, y, z) = 0$$

reprezintă fasciculul de cuadrice care trec prin curba de intersecție a cuadricelor date.

Probleme

1. Să se reducă la forma canonică ecuația cuadricei

$$7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+30=0. \quad (1)$$

O. N. Tuberbiller

Soluție.

Calculînd invarianții δ și Δ ai cuadricei (1), găsim

$$\delta=162,\ \Delta=-6\delta.$$

Cuadrica este deci nedegenerată cu centru.

Sistemul care determină coordonatele centrului este

$$7x-2y-3=0,\ 6y-2x-2z-12=0,\ 5z-2y+9=0.$$

Centrul cuadricei este deci punctul Ω $(1, 2, -1)$.

Ecuația seculară este

$$S^3-18S^2+99S-162=0,$$

avînd rădăcinile $S_1=3$, $S_2=6$, $S_3=9$.

Cuadrica este deci un elipsoid real.

Sistemul care determină direcțiile axelor cuadricei este

$$(7-S)l-2m=0,\ 2l+(S-6)m+2n=0,\ 2m+(S-5)n=0. \quad (2)$$

Pentru $S=3$, acest sistem are soluția $m=n=2l$.

Deci, consinusurile directoare ale axei Ω x' sînt $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$. Pentru $S=6$ sistemul (2) are soluția $l-n=2m$. deci consinusurile directoare ale axei Ω y' sînt $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$.

Pentru $S=9$, soluția sistemului (2) este $l=-2m=2n$, deci consinusurile directoare ale axei Ω z' sînt $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$.

Ecuațiile axelor cuadricei sînt

$$[\Omega x']: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{2},$$

$$\Omega y': \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-2},$$

$$\Omega z': \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{1}.$$

Prin schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x=\dfrac{x'+2y'+2z'}{3}+1, \\ y=\dfrac{2x'+y'-2z'}{3}+2, \\ z=\dfrac{2x'-2y'+z'}{3}-1, \end{cases}$$

ecuația cuadricei (1) devine

$$x'^2+2y'^2+3z'^2-2=0.$$

2. *Să se determine natura cuadricei*

$$2y^2+4xy-8xz-4yz+6x-5=0. \qquad (1)$$

N. Abramescu

Soluție.

Avem $\delta=0$. Ecuația în S este

$$S^3-2S^2-24S=0,$$

care are rădăcinile $S_1=0$, $S_2=-4$, $S_3=6$.

Cuadrica este un paraboloid

Noile axe sînt determinate de ecuațiile

$$\frac{1}{2}\varphi'_x-Sx=0;\ \frac{1}{2}\varphi'_y-S\cdot y=0;\ \frac{1}{2}\varphi'_z-S\cdot z=0,$$

în care înlocuim pe S cu S_1, S_2, S_3. Obținem

$$Ox':\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{-1};\ Oy':\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1};\ Oz':\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1},$$

trei drepte ortogonale între ele două cîte două. Cosinusurile directoare ale axelor sînt

$$Ox':\quad a_1=\frac{1}{\sqrt{6}};\quad b_1=-\frac{2}{\sqrt{6}};\quad c_1=-\frac{1}{\sqrt{6}};$$

$$Oy':\quad a_2=\frac{1}{\sqrt{2}};\quad b_2=0;\quad c_2=\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$Oz':\quad a_3=\frac{1}{\sqrt{3}};\quad b_3=\frac{1}{\sqrt{3}};\quad c_3=-\frac{1}{\sqrt{3}};$$

Rotația este definită de relațiile

$$x=\frac{x'}{\sqrt{6}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}+\frac{z'}{\sqrt{3}};\ y=-\frac{2x'}{\sqrt{6}}+\frac{z'}{\sqrt{3}};\ z=-\frac{x'}{\sqrt{6}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}-\frac{z'}{\sqrt{3}}.$$

Ecuația (1) devine

$$-4y'^2+6z'^2+6\left(\frac{x'}{\sqrt{6}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}+\frac{z'}{\sqrt{3}}\right)-5=0$$

sau

$$-4\left(y'-\frac{6}{8\sqrt{2}}\right)^2+6\left(z'+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\sqrt{6}\cdot x'-\frac{45}{8}=0.$$

Făcînd translaţia

$$X=x'-\frac{45}{8\sqrt{6}},\quad Y=y'-\frac{6}{8\sqrt{2}},\quad Z=z'+\frac{1}{2\sqrt{3}},$$

ecuaţia devine

$$-4Y^2+6Z^2+\sqrt{6}X=0.$$

Cuadrica este un paraboloid hiperbolic, cu vîrful $\left(\frac{45}{3\sqrt{6}},\ \frac{6}{8\sqrt{2}},\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ iar ca axă direcţia Ox' $(1,-2,-1)$.

3. Să se detremine locul geometric (Γ) al punctelor P din spaţiu pentru care raportul distanţelor la un punct fix A şi la o dreaptă fixă (d) este o constantă K. Să se studieze natura locului geometric (Γ) cînd parametrul k variază.

Soluţie.

Într-un sistem de coordonate carteziene luăm ca axă x dreapta (d) şi ca axă y perpendiculara pe (d) în A. Dacă notăm cu a distanţa de la punctul A la (d), avem ecuaţia

$$x^2+(1-k^2)y^2+(1-k^2)z^2-2ay+a^2=0,\quad (k>0), \tag{1}$$

care reprezintă o cuadrică.

Calculînd invarianţii δ şi Δ ai cuadricei, obţinem

$$\delta=(1-k^2)^2\,;\ \Delta=k^2a^2(k^2-1).$$

Dacă $a=0$, deci dacă A se află pe dreapta (d), avem $\Delta=0$ şi cuadrica este degenerată. Ecuaţia (1) se scrie

$$x^2+(1-k^2)(y^2+z^2)=0,$$

deci dacă $k<1$ cuadrica este un con imaginat, dacă $k>1$ cuadrica este un con circular cu vîrful în A şi avînd ca axă dreapta (d), iar dacă $k=1$ cuadrica degenerează în planul perpendicular pe dreapta (d) în punctul A luat de două ori $(x^2=0)$.

Dacă $a\neq 0$, deci dacă A este exterior dreptei (d) şi dacă $k\neq 1$ avem $\delta\neq 0$, $\Delta\neq 0$ şi cuadrica este nedegernată, cu centru la distanţă finită. Ecuaţia (1) se scrie în acest caz

$$\frac{1}{1-k^2}x^2+\left(y-\frac{a}{1-k^2}\right)^2+z^2-\frac{a^2k^2}{(1-k^2)^2}=0.$$

Dacă $k>1$, cuadrica este un hiperboloid de rotaţie cu o pînză.

Dacă $a\neq$ şi $k=1$, ecuaţia (1) devine

$$x^2-2ay+a^2=0$$

și cuadrica degenerează într-un cilindru parabolic a cărui directoare este parabola

$$x^2=2ay-a^2,\ z=0,$$

iar generatoarele sînt drepte paralele cu axa z.

4. *Se dă cuadrica*

$$f(x,\ y,\ z)\equiv axy+a^2xz+byz+a^2b^2=0.$$

1° *Să se determine a și b astfel încît cuadrica să fie un hiperboloid cu o pînză.*

Să se determine a și b astfel încît cuadrica să fie un hiperboloid cu două pînze.

2° Să se determine a și b astfel încît cuadrica să admită ca plan principal planul bisector al diedrului $xOzy'$. Aceeași problemă pentru planul bisector al diedrului $zOyx'$. Care este natura cuadricelor în aceste cazuri?

M. Stoka[1]

Soluție.

Invarianții δ și $\triangle$ sînt $\delta=2a^3b$, $\triangle=4a^5b^3$. Ecuația în S este

$$-S^3+(a^4+a^2+b^2)\,S+2\,a^3b=0. \qquad (1)$$

1° Pentru ca această cuadrică să fie un hiperboloid cu o pînză trebuie ca $S_1<0\ ;S_2<0\ ;S_3>0$.

Dacă $S_1S_2S_3=2a^3b>0$, atunci avem îndeplinită această condiție, căci nu putem avea toate trei rădăcinile pozitive $(S_1+S_2+S_3=0)$.

Deci, pentru ca cuadrica să fie hiperbolid cu o pînză este necesar și suficient ca $ab>0$.

In al doilea caz (hiperboloid cu două pînze) trebuie ca $S_1<0$, $S_2>0$, $S_3>0$, deci $S_1S_2S_3=5\ a^3b<0$ (cazul $S_1<0$, $S_2<0$. $S_3<0$, se exclude căci $S_1+S_2+S_3=0$).

Deci pentru ca cuadrica să fie un hiperboloid cu două pînze este necesar și suficient ca $ab<0$.

2° Ecuațiile planelor principale ale cuadricei $f(x,\ y,\ z)=0$ sînt

$$\frac{1}{2}f'_x-S.x=0\ ;\frac{1}{2}f'_y-S.y=0\ ;\frac{1}{2}f'_z-S.z=0,$$

unde S este o rădăcină a ecuației (1).

Deci, pentru ca cuadrica să admită ca planul principal, planul bisector al diedrului $xOzy'$, trebuie ca

$$\frac{1}{2}f'_x-S\cdot x\equiv k\,(x-y+z)\ \text{sau}\ (-2Sx+ay+a^2z)\equiv 2k\,(x-y+z).$$

Identificînd, obținem $a=-1$, $S=-\frac{1}{2}$ (am exclus cazul $a=0$, care reduce cuadrica la $yz=0$). Inlocuind aceste valori în (1), găsim

$$b=-\frac{1}{2}\ \text{și}\ b=-\frac{7}{2}.$$

[1] G. M. F. Seria A; nr. 1, anul 1951

Deci, cuadricele

$$4xy - 4xz - 2yz - 1 = 0, \quad 4xy - 4xz + 7yz - 49 = 0$$

sînt hiperboloizi cu o pînză ($ab > 0$) care admit ca plan principal planul bisector al diedrului $xOxy'$, iar cuadricele

$$4xy + 4xz - 2yz + 1 = 0, \quad 4xy + 4xz - 7yz + 49 = 0.$$

sînt hiperboloizi cu două pînze ($ab < 0$) care admit ca plan principal planul bisector al diedrului $zOyx'$.

5. *Se consideră, față de un sistem de coordonate carteziene, o cuadrică de ecuație parametrice*

$$x = \lambda u + v, \quad y = u - \lambda v, \quad z = uv. \tag{1}$$

Să se determine natura acestei cuadrice și să se reducă la forma canonică.

Soluție.

Eliminînd pe u și v între ecuațiile (1), obținem ecuația cuadricei sub forma

$$\lambda x^2 + (1 - \lambda^2)\, xy - \lambda y^2 - (1 + \lambda^2)^2 z = 0. \tag{1'}$$

Calculînd invarianții Δ și δ ai acestei cuadrice, obținem

$$\Delta = \frac{(1+\lambda^2)^6}{16}, \quad \delta = 0.$$

Cuadrica este deci un paraboloid.

Ecuația în S are rădăcinile

$$S_1 = \frac{1+\lambda^2}{2}, \quad S_2 = -\frac{1+\lambda^2}{2}, \quad S_3 = 0.$$

Axele obținute prin rotație

$$x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 z',$$
$$y = b_1 x' + b_2 y' + b_3 z',$$
$$z = c_1 x' + c_2 y' + c_3 z'$$

sînt date de formulele

$$\lambda x + \frac{1-\lambda^2}{2} y - Sx = 0; \quad \frac{1-\lambda^2}{2} x - \lambda y - Sy = 0; \quad S.z = 0, \tag{2}$$

unde S se înlocuiește pe rînd cu S_1, S_2, S_3.

Axa Ox' se obțin înlocuind în (2) pe S cu S_1.

Obținem ecuațiile

$$(\lambda - 1)[(\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y] = 1; \quad (\lambda + 1)[(\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y] = 0; \quad z = 0. \tag{3}$$

Avem deci de analizat întîi cazurile $\lambda=\pm 1$. In aceste cazuri ecuația (1') se reduce la

$$x^2 \mp y^2 = 4z.$$

Deci, dacă $\lambda = 1$ cuadrica (1) este un paraboloid hiperbolic cu vîrful în origine și avînd ca axe axele de coordonate.

Dacă $\lambda \neq \pm 1$ ecuațiile (3) se scriu sub forma

$$Ox' : \frac{x}{\lambda+1} = \frac{y}{1-\lambda} = \frac{z}{0}. \tag{4}$$

Inlocuind în (2) pe S cu celelalte valori S_2 și S_3, obținem ecuațiile Oy' și Oz':

$$Oy' : \frac{x}{\lambda-1} = \frac{y}{\lambda+1} = \frac{z}{0}; \quad Oz' : \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}. \tag{4'}$$

Coeficienții a_1, b_1 c_1 sînt cosinusurile directoare ale axei Ox', deci

$$a_1 = \frac{\lambda+1}{\sqrt{2(\lambda^2+1)}}; \quad b_1 = \frac{1-\lambda}{\sqrt{2(\lambda^2+1)}}; \quad c_1 = 0.$$

La fel, a_2, b_2, c_2, și a_3, b_3, c_3 sînt dați de formulele

$$a_2 = \frac{\lambda-1}{\sqrt{2(\lambda^2+1)}}; \quad b_2 = \frac{\lambda+1}{\sqrt{2(\lambda^2+1)}}; \quad c_2 = 0;$$
$$a_3 = 0 \quad ; \quad b_3 = 0 \quad ; \quad c_3 = 1.$$

Deci, rotația este

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2(\lambda^2+1)}} [(\lambda+1)x' + (\lambda-1)y'], \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2(\lambda^2+1)}} [(1-\lambda)x' + (\lambda+1)y'], \\ z = z' \end{cases} \tag{5}$$

Cu această rotație (1') devine

$$x'^2 - y'^2 = 2(\lambda^2+1)z' \tag{6}$$

Deci, dacă $\lambda \neq \pm 1$ cuadrica (1) este un paraboloid hiperbolic cu vîrful în origine, cu axele date de (4) și (4') și a cărui ecuație redusă (6) se obține prin rotația (5).

6. *Față de un sistem de axe ortogonale, se consideră cuadricele definite de ecuațiile*

$$(\Gamma_1) : 4x^2 + y^2 - 8z = 0; \quad (\Gamma_2) : x^2 + 4y^2 + 8z - 20 = 0. \tag{1}$$

1° *Să se determine coordonatele unui punct oarecare M al curbei de intersecție a celor două cuadrice.*

2° *Să se demonstreze că cele două cuadrice (Γ_1) și (Γ_2) sînt ortogonale.*

Soluție.

1° Curba de intersecție a cuadricei (Γ_1) și (Γ_2) este dată de sistemul (1) sau de sistemul echivalent

$$4x^2+y^2-8z=0,\ x^2+y^2=0.$$

Punînd $x=2\cos\varphi$, $y=2\sin\varphi$, a doua ecuație este verificată iar prima ne dă

$$z=\frac{1}{2}(3\cos^2\varphi+1).$$

Deci, coordonatele punctului M sînt

$$x=2\cos\varphi,\ y=2\sin\varphi,\ z=\frac{1}{2}(3\cos^2\varphi+1). \tag{2}$$

Punînd $tg\frac{\varphi}{2}=t$ obținem o altă reprezentare parametrică a intersecției cuadricelor (Γ_1) și (Γ_2), sub forma

$$x=\frac{2(1-t^2)}{1+t^2},\ y=\frac{4t}{1+t^2},\ z=\frac{2(t^4-t^2+1)}{(1+t)2}$$

2° Planul tangent la cuadrica (Γ_1) în punctul M, ale cărui coordonate sînt date de (2) are ecuația

$$4\cos\varphi\cdot x+\sin\varphi\cdot y-2z-3\cos^2\varphi-1=0.$$

De asemenea, planul tangent la cuadrica (Γ_2) în punctul P este

$$\cos\varphi\cdot x+4\sin\varphi\cdot y+2z+3\cos^2\varphi-6=0.$$

Aceste două plane sînt perpendiculare, deci cuadricele (Γ_1) și (Γ_2) sînt ortogonale.

7. Să se determine ecuația unei cuadrice care trece prin axa Oy, este tangentă la axele Ox și Oz în punctele lor improprii și trece prin punctele A (2,1 — 1) și B(1, 2, 2).

Soluție.

Ecuația cuadricei în coordonate carteziene omogene este

$$\sum_{i,j}^{1,4} a_{ij}x_ix_j=0. \tag{1}$$

Pentru ca această cuadrică să treacă prin axa $Oy(x_1=0,\ x_3=0)$ trebuie ca ecuația

$$a_{22}x_2^2+2a_{24}x_2x_4+a_{44}x_4^2=0,$$

obținută prin intersecția cuadricei (1) cu axa Oy, să fie identic verificată, adică trebuie ca $a_{22}=a_{24}=a_{44}=0$.

Coordonatele celor două puncte de intersecție ale cuadricei cu axa Ox ($x_2=0$, $x_3=0$) sînt date de ecuația

$$a_{11}x_1^2+2a_{14}x_1x_4+a_{44}x_4^2=0.$$

Pentru ca aceste două puncte să coincidă cu punctul X_∞ (1, 0, 0, 0) trebuie ca $a_{11}=a_{14}=0$.

Analog, considerînd axa Oz, obținem $a_{33}=a_{34}=0$.

Ecuația cuadricei se scrie

$$a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+a_{23}x_2x_3=0.$$

Punînd condiția ca această cuadrică să treacă prin punctele A și B, obținem $a_{12}=-3\rho$, $a_{13}=-5\rho$, $a_{23}=4\rho$.

Ecuația cuadricei este, deci.

$$3x_1x_2+5x_1x_3-4x_2x_3=0$$

sau, în coordonate neomogene,

$$3xy+5xz-4yz=0.$$

Cuadrica este un con cu vîrful în origine.

8. *Să se găsească ecuația cuadricei care este tangentă la axele de coordonate respectiv în punctele (2, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 3) și la planul impropriu în punctul impropriu al dreptei $x=y=2z$.*

Soluție.

Dacă $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+\ldots+a_{44}=0$ este ecuația cuadricei, abscisele punctelor de intersecție cu axa Ox sînt rădăcinile ecuației $a_{11}x^2+2a_{14}x+a_{44}=0$. În ipoteza problemei, aceasta trebuie să coincidă cu ecuația $x^2-4x+4=0$ (care admite rădăcina dublă $x=2$.); deci trebuie să avem

$$a_{11}=-\frac{a_{14}}{2}=\frac{a_{41}}{2}. \tag{1}$$

La fel, impunînd ecuațiilor $a_{22}y^2+2a_{24}y+a_{44}=0$, $a_{33}z^2+2a_{34}z+a_{44}=0$ să coincidă respectiv cu $y^2-2y+1=0$, $z^2-6z+9=0$, avem condițiile

$$a_{22}=-a_{24}=a_{44};\quad a_{33}=-\frac{a_{34}}{3}=\frac{a_{44}}{9}. \tag{2}$$

Planul polar al punctului $\left(1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$ (punctul impropriu al dreptei $x=y=2z$) are ecuația

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}+a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}+$$
$$\frac{1}{2}(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34})=0.$$

Pentru ca acest plan să reprezinte planul impropriu ($x_4=0$) trebuie să avem

$$2a_{11}+2a_{12}+a_{13}=0,\ 2a_{12}+a_{22}+2a_{23}=0,\ 2a_{13}+2a_{23}+a_{33}=0. \tag{3}$$

Ţinînd seama de condiţiile (1), (2), (3), rezultă

$$a_{11}=\frac{\rho}{4},\ a_{22}=\rho,\ a_{33}=\frac{\rho}{9},\ a_{12}=-\frac{11\rho}{18},\ a_{13}=\frac{13\rho}{18},$$

$$a_{14}=-\frac{\rho}{2},\ a_{23}=-\frac{7\rho}{9},\ a_{24}=-\rho,\ a_{34}=-\frac{2\rho}{3},\ a_{44}=\rho.$$

Deci, ecuaţia cuadricei este

$$\frac{1}{4}x^2+y^2+\frac{1}{9}z^2-\frac{11}{9}xy+\frac{13}{9}xz-\frac{14}{9}yz-x-2y-\frac{2}{3}z+1=0.$$

9. *Să se găsească locul geometric al dreptelor care se sprijină pe trei drepte strîmbe două cîte două.*

Soluţie.

Fie

$$(d_1):\begin{cases}y=mx,\\ z=a;\end{cases}\quad (d_2):\begin{cases}y=-mx,\\ z=-a;\end{cases}\quad (d_3):\begin{cases}y=0,\\ z=0\end{cases}$$

ecuaţiile celor trei drepte. Ecuaţia fasciculului de plane avînd ca axă dreaptă (d_1) este

$$z-a+\lambda(y-mx)=0.$$

Planul acestui fascicul care trece printr-un punct oarecare $M(h, 0, 0)$ al dreptei (d_3) se obţine pentru $\lambda=-\frac{a}{mh}$; rezultă

$$mh(z-a)-a(y-mx)=0. \qquad (1)$$

Ecuaţia (1) este, deci, ecuaţia planului determinat de dreapta (d_1) şi punctul M.

La fel se găseşte planul determinat de dreapta (d_2) şi punctul:

$$mh(z+a)-a(y+mx)=0. \qquad (2)$$

Dreapta după care se intersectează planele (1) şi (2) se sprijină pe cele trei drepte date şi cînd punctul P variază se obţin toate dreptele sprijinite pe dreptele (d_1), (d_2), (d_3). Ecuaţia locului geometric căutat se deduce eliminînd pe h între ecuaţiile (1) şi (2). Se obţine $mxz-ay=0$, care reprezintă un paraboloid riglat.

10. Să se determine generatoarele rectilinii ale cuadricei

$$x^2+5y^2-4z^2+2xy-2xz+6yz-2x-2y+2z-15=0$$

Gh. Th. Gheorghiu

Soluţie.

Problema s-ar putea rezolva reducînd mai întîi ecuaţiile la formele lor canonice şi grupînd apoi termenii în aşa fel încît să obţinem în ambele părţi ale egalităţii produse de cîte doi factori. Aici, vom proceda direct, fără a mai aduce ecuaţia la forma canonică. Deoarece gruparea în factori nu este întotdeauna uşor de făcut, se procedează mai întîi la o scriere a

ecuației sub forma de sumă de pătrate. Procedeul practic constă în a ordona ecuația după una dintre variabile, adică

$$x^2+2x(y-z-1)+5y^2-4z_2+6yz-2y+2z-15=0,$$

Din primii doi termeni se formează un pătrat perfect. Se găsește

$$(x+y-z-1)^2-(y-z-1)^2+5y^2-4z^2+6yz-2y+2z-15=0.$$

La fel se ordonează acești tremeni după o altă variabilă, de exemplu după y. Se obține

$$-(y-z-1)^2+5y^2-4z_2-6yz-2y+2z-15=4(y+z)^2-9z^2-16.$$

Ecuația cuadricei se poate scrie sub forma

$$(x+y-z-1)^2-9z_2=16-4(y+z)^2$$

sau

$$(x+y+2z-1)(x+y-4z-1)=-4(y+z+2)(y+z-2).$$

Generatoarele cuadricei sînt

$$(G_1):x+y+2z-1=4\lambda(y+z+2),\lambda(x+y-4z-1)=2-y-z,$$

$$(G_2):x+y+2z-1=-\mu(y+z-2),\mu(x+y-4z-1)=4(y+z+2).$$

11. *Față de un sistem de axe ortogonale Oxyz, se consideră cuadricele de ecuații*

$$x^2+y^2-yz=0,\ x^2+y^2-x=0, \tag{1}$$

a căror intersecție este formată dintr-o dreaptă și o cubică strîmbă (Γ).

Să se determine sistemul (S) de cuadrice (Q) trecînd prin (Γ) *și locul geometric al centrelor lor.*

Să se găsească printre cuadricele (Q) acelea care sînt paraboloizi și locul geometric al vîrfurilor lor.

Soluție.

Prima cuadrică (1) este un con cu vîrful în originea axelor decoordonate, iar a doua este un cilindru circular cu generatoarele paralele cu Oz și trecînd prin O. Aceste două cuadrice au comună axa Oz, de ecuații $x=y=0$. Avînd în vedere că intersecția completă a două cuadrice este o cuartică, rezultă că cele două cuadrice (1) se mai intersectează după o cubică strîmbă (Γ).

Prima ecuație (1) se mai poate scrie $\frac{x}{y}=\frac{z-y}{x}=\lambda$ sau

$$x=\lambda y,\ z-y=\lambda x. \tag{2}$$

A doua ecuație (1) se scrie $\frac{x}{y}=\frac{y}{1-x}=\mu$ sau

$$x=\mu y,\ y=\mu(1-x). \tag{3}$$

Avînd în vedere că cele două familii de plane (2) și (3) au comun planul $x=\lambda y$, rezultă că cubica (Γ), este locul geometric al punctelor comune planelor

$$x=\lambda y,\ z-y=\lambda x,\ y=\lambda(1-x). \tag{4}$$

Rezolvînd acest sistem în raport cu x, y, z, deducem reprezentarea parametrică a cubicei (Γ)

$$(\Gamma):\quad x=\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2},\ y=\frac{\lambda}{1+\lambda^2},\ z=\lambda.$$

Intrucît cele două cuadrice (1) se intersectează după dreapta $x=y=0$ și cubica (Γ), rezultă că pentru a găsi c. a treia cuadrică care să treacă prin (Γ) trebuie să-l eliminăm pe λ între ultimele două plane (4) care nu conțin axa Oz. Obținem astfel cuadrica $xz+y-z=0$.

Sistemul (S) de cuadrice (Q) care trec prin cubica (Γ) are deci ecuația

$$(S):\quad \alpha[x^2+y^2-yz]+\beta[x^2+y^2-x]+xz+y-z=0. \tag{5}$$

Pentru a determina coordonatele centrelor cuadricelor (Q) trebuie să rezolvăm sistemul format de derivatele parțiale, egalate cu zero, ale ecuației cuadricelor (Q). Avem

$$\begin{cases} 2x\alpha+(2x-1)\beta+z=0, \\ (2y-z)\alpha+2y\beta+1=0, \\ y\alpha-x+1=0. \end{cases}$$

Eliminînd între aceste ecuații pe α și β, obținem ecuația locului geometric al centrelor cuadricelor (Q):

$$2z(x^2+y^2)-3xz-y+z=0.$$

Aceasta este o suprafață de gradul al treilea care trece prin origine și care conține axa cilindrului, de ecuații, $x=\frac{1}{2}, y=0$.

Scriind ecuația (5) a sistemului (S) de cuadrice (Q) sub forma

$$(\alpha+\beta)x^2+(\alpha+\beta)y^2+xz-\alpha yz-\beta x+y-z=0,$$

familia paraboloizilor din sistemul (S) se obține pentru $\delta=0$, adică

$$(1+\alpha^2)(\alpha+\beta)=0.$$

Deci $\alpha+\beta=0$ și familia de paraboloizi căutată are ecuația

$$xz+y-z-\alpha(yz-x)=0.$$

Ecuația seculară a acestui paraboloid este

$$S^3-(\alpha^2+1)S=0.$$

avînd rădăcinile $S_1=0$, $S_2=\sqrt{\alpha^2+1}$, $S=-\sqrt{\alpha^2+1}$.

Planele principale ale paraboloidului, care determină axa principală, sînt

$$x-ay+\sqrt{a^2+1}z-1=0,\ x-ay-\sqrt{a^2+1}z-1=0.$$

Deci, axa principală are ecuațiile $x=ay+1$, $z=0$.

Vîrful paraboloidului se obține intersectînd axa principală cu paraboloidul. Găsim astfel $V\left(\frac{1}{a^2+1}, -\frac{a}{a^2+1}, 0\right)$.

Locul geometric al vîrfului se obține eliminînd pe a între ecuațiile

$$x=\frac{1}{a^2+1},\ y=-\frac{a}{a^2+1},\ z=0.$$

Deci, locul geometric căutat este cercul $x^2+y^2-x=0$, $z=0$, al cărui centru este punctul în care axa cilindrului intersectează planul $z=0$.

12. *Față de un sistem de axe ortogonale* $Oxyz$, *se consideră două drepte* (d_1) *și* (d_2) *de ecuații*

$$(d_1): x-a=0,\quad x-z\operatorname{tg}\varphi=0,$$
$$(d_2);\ x+a=0,\quad y+z\operatorname{tg}\varphi=0.\qquad \left(\varphi\neq 2k\pi\pm\frac{\pi}{2}\right).$$

1° Să se arate că locul geometric al punctelor egal depărtate de dreptele (d_1) și (d_2) este o cuadrică (Γ).

2° Să se reducă la forma canonică ecuația cuadricei (Γ).

Soluție.

1° Fie $M(\alpha, \beta, \gamma)$ un punct din spațiu. Distanțele de la M la dreptele (d_1) și (d_2) sînt date de relațiile

$$\delta_1^2=(\alpha-a)^2+(\gamma-\alpha\operatorname{ctg}\varphi)^2;\quad \delta_2^2=(\alpha+a)^2+(\cos\varphi\cdot\beta+\sin\varphi\cdot\gamma)^2.$$

Scriind că $\delta_1=\delta_2$, obținem

$$\cos^2\varphi\beta+2\sin\varphi\cos\varphi\cdot\beta\gamma-\cos^2\varphi\gamma^2+4a\alpha+2a\operatorname{ctg}\varphi\gamma-a^2\operatorname{ctg}^2\varphi=0.$$

Înlocuind pe α, β, γ prin coordonatele x, y, z găsim ecuațiile locului geometric

$$(\Gamma):\ \cos^2\varphi\cdot\gamma^2+2\sin\varphi\cos\varphi\cdot yz-\cos^2\varphi\cdot z^2+ +4ax+2a\operatorname{ctg}\varphi z-a^2\operatorname{ctg}^2\varphi=0. \qquad (1)$$

2° Invarianții Δ și δ ai cuadricei (1) sînt $\Delta=4a^2\cos^2\varphi$, $\delta=0$ deci cuadrica este un paraboloid.

Ecuația seculară este

$$S^3-\cos^2\varphi\cdot S=0,$$

având rădăcinile $S_1=0$, $S_2=\cos\varphi$, $S_3=-\cos\varphi$.

Axele cuadricei sînt determinate de ecuațiile

$$Sx=0,\quad (\cos^2\varphi\cdot-S)y+\sin\varphi\cos\varphi\cdot z=0$$

$$\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot y-(\cos^2\varphi+S)z=0$$

Inlocuind în aceste ecuații pe S cu rădăcinile ecuației seculare, obținem ecuațiile axelor cuadricei

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0};\quad \frac{x}{a}=\frac{y}{\sin\varphi}=\frac{z}{1-\cos\varphi};\quad \frac{x}{a}=\frac{y}{\cos\varphi-1}=\frac{z}{\sin\varphi}.$$

Cosinusurile directoare ale acestor trei drepte sînt

$$a_1=1;\quad b_1=0;\qquad c_1=0;$$

$$a_2=0;\quad b_2=\cos\frac{\varphi}{2};\quad c_2=\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$a_3=0;\quad b_3=-\sin\frac{\varphi}{2};\ c_3=\cos\frac{\varphi}{2}$$

Deci pentru a reduce ecuația (1) la forma canonică trebuie să facem rotația definită de formulele

$$x=x';\quad y=\cos\frac{\varphi}{2}y'-\sin\frac{\varphi}{2}z';\quad z=\sin\frac{\varphi}{2}y'+\cos\frac{\varphi}{2}z', \tag{2}$$

adică o rotație în planul yOz de unghi $\frac{\varphi}{2}$. Avînd în vedere formulele (2), ecuația (1) devine

$$4ax'=-\cos\varphi\left(y'+\frac{a}{2\cos\frac{\varphi}{2}}\right)^2+\cos\varphi\left(z'-\frac{a}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\right)^2.$$

Dacă facem acum translația

$$x'=X,\quad y'=Y-\frac{a}{2\cos\frac{\varphi}{2}};\quad z'=Z+\frac{a}{2\sin\frac{\varphi}{2}} \tag{3}$$

ecuația cuadricei (Γ) se scrie

$$4aX=-\cos\varphi\cdot Y^2+\cos\varphi\cdot Z^2.$$

Cuadrica (Γ) este, deci, un paraboloid hiperbolic.

Formulele finale de transformare se obțin compunînd rotația (2) cu translația (3):

$$x=X;\quad y=\cos\frac{\varphi}{2}Y-\sin\frac{\varphi}{2}Z-a;$$

$$z=\sin\frac{\varphi}{2}Y+\cos\frac{\varphi}{2}Z+a\operatorname{ctg}\varphi.$$

Vîrful paraboloidului are coordonatele $X=Y=Z=0$ sau $x=0$, $y=-a$, $z=a\operatorname{ctg}\varphi$.

13. Fie, într-un sistem de axe ortogonale, un cerc (C), în planul xOy, de ecuație

$$x^2+y^2-R^2=0,\ z=0$$

și punctele $A(x_0, 0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$. Considerăm un punct M în planul xOy și planul trecînd prin punctul A și polara lui M față de cercul (C).

Să se determine locul geometric al punctului de intersecție al acestui plan cu dreapta BM, cînd punctul M variază. Acest loc geometric este o cuadrică, Să se discute natura acestui cuadrice cînd N se deplasează în spațiu, A fiind fix.

Soluție.

Fie punctul $M(\alpha, \beta, 0)$. Polara lui față de cercul (C) are ecuațiile

$$z_0(\alpha x+\beta y-R^2)-(\alpha x_0-R^2)z_1=0. \tag{1}$$

Ecuația dreptei BM este

$$\frac{x-x_1}{\alpha-x_1}=\frac{y-y_1}{\beta-y_1}=\frac{z-z_1}{-z_1}. \tag{2}$$

Pentru a găsi locul geometric eliminăm pe α, β între ecuațiile (1) și (2). Obținem astfel cuadrica

$$(\Gamma):\ z_0z_1(x^2+y^2)+(x_0x_1-R^2)z^2-y_1z_0y-(x_0z_1+x_1z_0)xz+R^2(z_0+z_1)z-$$
$$-R^2z_0z_1=0.$$

După cum se verifică imediat, cuadrica (Γ) trece prin cercul (C) și punctele A și B.

Descompunînd în pătrate această ecuație, obținem

$$4(P^2+Q^2)-\pi_1z^2+4R^2(z_0+z_1)z_0z_1z-4R^2z_0^2z_1^2=0. \tag{3}$$

unde am notat

$$P=z_0z_1x-\frac{x_0z_1+x_1z_0}{2}z;$$

$$Q=z_0z_1y-\frac{z_0y_1}{2}z;\quad \pi_1=(x_0z_1-z_0x_1)^2+y_1^2z_0^2+4R^2z_0z_1$$

Vom presupune întîi că $\pi_1\neq 0$. În acest caz, notînd

$$U=\pi_1z-2R^2(z_0+z_1)z_0z_1,$$

ecuația (3) se scrie

$$P^2+Q^2-\frac{U^2}{4\pi_1}-\frac{Rz_0^2z_1}{\pi_1}\pi_2=0, \tag{4}$$

unde

$$\pi_2=(x_0z_1-x_1z_0)^2+y_0^2z_0^2-R_2(z_0-z_1)^2.$$

Natura cuadricei (Γ) depinde deci de semnul cantităţilor π_1 şi π_2.

Vom considera, deci, suprafeţele

$$(z_0x - x_0z)^2 + z_0^2y^2 + 4R^2z_0z = 0, \tag{5}$$

$$(z_0x - x_0z)^2 + z_0^2y^2 - R^2(z - z_0)^2 = 0 \tag{6}$$

Ecuaţia (5) reprezintă un paraboloid eliptic tangent în origine la planul xOy şi a cărui axă este dreapta $z_0x - x_0z = 0$, $y = 0$, adică dreapta OA'.

Ecuaţia (6) reprezintă un con real avînd ca vîrf punctul A. Scriind ecuaţia (6) sub forma

$$(z_0x - x_0z)^2 + z_0^2y^2 + 4R^2z_0z - R_2(z + z_0)^2 = 0,$$

se vede imediat că conul (6) este circumscris paraboloidului (5) în lungul cercului

$$(x - x_0)^2 + y^2 - 4R^2 = 0, \quad z + z_0 = 0. \tag{7}$$

De aici rezultă că punctul A este exterior paraboloidului (5) şi deci pentru punctele B exterioare paraboloidului avem $\pi_1 > 0$.

De asemenea se verifică imediat că dacă B este în exteriorul conului (6) avem $\pi_2 > 0$.

Deci, dacă B nu se află pe paraboloidul (5), ($\pi_1 \neq 0$), avem următoarea discuţie a naturii cuadricei (Γ):

a) Dacă B este în interiorul paraboloidului (5) el este de asemenea în interiorul conului (6) şi avem $\pi_1 < 0$, $\pi_2 < 0$. Cuadrica este deci un elipsoid real.

b) Dacă B este în interiorul paraboloidului dar în interiorul conului, avem $\pi_2 < 0$, $\pi_1 > 0$ şi (Γ) este un hiperboloid cu două pînze.

c) Dacă B este în exteriorul conului avem $\pi_1 > 0$, $\pi_2 > 0$ şi cuadrica (Γ) este un hiperboloid cu o pînză.

d) Dacă B se află pe conul (6), dar nu pe cercul (7), avem $\pi_2 = 0$ şi cuadrica (Γ) este un con real.

Vom presupune acum că punctul B se află pe paraboloidul (5), deci că $\pi_1 = 0$. În acest caz avem:

e) Dacă B este pe cercul (7) avem $z_0 + z_1 = 0$ şi cuadrica (Γ) este un cilindru real.

f) Dacă B nu se află pe cercul (7) avem $z_0 + z_1 \neq 0$ şi (Γ) este un paraboloid eliptic.

14. *Se consideră în spaţiu dreapta (d) de ecuaţie $x = y = o$ şi cercul (C) dat de ecuaţiile $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$, $z = 0$.*

Se cere:

1° *Ecuaţia sistemului de cuadrice care conţin dreapta (d) şi cercul (C).*

2° *Să se determine natura şi să se reducă la forma canonică aceste cuadrice.*

Soluție.

1° Cuadricele care conțin axa Oz au ecuația

$$ax^2+by^2+cxy+dxz+eyz+fx+gy=0.$$

Pentru ca aceste cuadrice să conțină cercul (C) trebuie ca, intersectîndu-le cu planul $z=0$, să găsim ecuația

$$x^2+y^2-2x=0,$$

adică trebuie să avem $a=b=\rho$, $c=g=0$, $f=-2\rho$.

Deci, cuadricele trecînd prin dreapta (d) și cercul (C) au ecuația

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+2\lambda xz+2\mu yz-2x=0. \qquad (1)$$

2° Calculînd invarianții Δ și δ ai cuadricei (1), obținem

$$\Delta=\mu^2, \quad \delta=-\lambda^2-\mu^2.$$

Deci, dacă $\lambda=\mu=0$, cuadrica (1) este degenerată de gen paraboloid. Ecuația ei devine

$$x^2+y^2-2x=0,$$

deci este un cilindru circular.

Dacă $\lambda\neq 0$, $\mu=0$, cuadrica este degenerată cu centru, deci este un con. Vîrful lui V are coordonatele $x=y=0$, $z=\frac{1}{\lambda}$.

Ecuația seculară este

$$(S-1)(S^2-S-\lambda^2)=0,$$

avînd rădăcinile $S_1=1$, $S_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{1+4\lambda^2}}{2}$.

Scriind ecuațiile

$$\frac{1}{2}\varphi'_x-S_x=0, \quad \frac{1}{2}\varphi'_y-S_y=0, \quad \frac{1}{2}\varphi'_z-S_z=0,$$

unde $\varphi(x,y,z)$ este grupul termenilor de gradul al doilea din ecuația cuadricei, pentru cele trei rădăcini ale ecuației seculare, obținem parametrii directorii ai celor trei axe ale cuadricei. Obținem astfel

$$Vx': 0,1,0; \quad Vy': S_2,0,\lambda; \quad Vz': S_3,0,\lambda.$$

Axele conului au deci ecuațiile

$$Vx': \frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-\frac{1}{\lambda}}{0},$$

$$Vy': \frac{x}{S_2}=\frac{y}{0}=\frac{z-\frac{1}{\lambda}}{\lambda},$$

$$Vz': \frac{x}{S_3}=\frac{y}{0}=\frac{z-\frac{1}{\lambda}}{\lambda}.$$

Cosinusurile directoare ale acestor axe sînt

$$a_1=0,\ b_1=0,\ c_1=0,$$

$$a_2=\frac{S_2}{\sqrt{\lambda^2+S_2}},\ b_2=0,\ c_2=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+S_2^2}},$$

$$a_3=\frac{S_3}{\sqrt{\lambda^2+S_3^2}},\ b_3=0,\ c_3=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+S_3^2}}.$$

Făcînd schimbarea de axe

$$x=a_1x'+a_2y'+a_3z',$$
$$y=b_1x'+b_2y'+b_3z',$$
$$z=c_1x'+c_2y'+c_3z'+\frac{1}{\lambda}$$

cuadrica devine

$$x'^2+\frac{1+\sqrt{1+4\lambda^2}}{2}y'^2+\frac{1-\sqrt{1+4\lambda^2}}{2}z'^2=0.$$

Conul este real.

Dacă $\mu\neq 0$ cuadrica este nedegenerată cu centru. Centrul cuadricei O' are coordonatele

$$x=\frac{\mu^2}{\lambda^2+\mu^2},\ y=-\frac{\lambda\mu}{\lambda^2+\mu^2},\ z=-\frac{\lambda}{\lambda^2+\mu^2}.$$

Ecuația seculară este

$$(S-1)\ (S^2-S-\lambda^2-\mu^2)=0,$$

avînd rădăcinile $S_1=1,\ S_{2,3}=\frac{1+\sqrt{1+4\lambda^2+4\mu^2}}{2}$.

Ca și în cazul precedent, parametrii directori ai axelor cuadricei sînt

$$O'x':\ \lambda,-\mu,0;\ O'y':\ \lambda,\mu,-S_3;\ O'z':\ \lambda,\mu-S_2.$$

Axele cuadricei au deci ecuațiile

$$O'x':\ \frac{x-\frac{\mu^2}{\lambda^2+\mu^2}}{\lambda}=\frac{y+\frac{\lambda\mu}{\lambda^2+\mu^2}}{\mu}=\frac{z-\frac{\lambda}{\lambda^2+\mu^2}}{0}$$

$$O'y':\ \frac{x-\frac{\mu^2}{\lambda^2+\mu^2}}{2\lambda}=\frac{y+\frac{\lambda\mu}{\lambda^2+\mu^2}}{2\mu}=\frac{z-\frac{\lambda}{\lambda^2+\mu^2}}{\sqrt{1+4\lambda^2+4\mu^2}-1},$$

$$O'z':\ \frac{x-\frac{\mu^2}{\lambda^2+\mu^2}}{2\lambda}=\frac{y+\frac{\lambda\mu}{\lambda^2+\mu^2}}{2\mu}=\frac{z-\frac{\lambda}{\lambda^2+\mu^2}}{\sqrt{1+4\lambda^2+4\mu^2}-1}.$$

Cosinusurile directoare ale acestor axe sînt

$$a_1=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}},\quad b_1=\frac{-\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}},\quad c_1=0,$$

$$a_2=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+S_3^2}},\quad b_2=\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+S_3^2}},\quad c_2=-\frac{S_3}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+S_3^2}}$$

$$a_3=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+S_2^2}},\quad b_3=\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+S_2^2}},\quad c_3=-\frac{S_2}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+S_2^2}}$$

Făcînd schimbarea de axe definită de formulele

$$x=a_1x'+a_2y'+a_3z'+\frac{\mu^2}{\lambda^2+\mu^2},$$

$$y=b_1x'+b_2y'+b_3z'-\frac{\lambda\mu}{\lambda^2+\mu^2},$$

$$z=cx'+cy'+cz'-\frac{\lambda}{\lambda^2+\mu^2},$$

cuadrica devine

$$x'^2+\frac{1+\sqrt{1+4\lambda^2+4\mu^2}}{2}y'^2+\frac{1-\sqrt{1+4\lambda^2+\mu^2}}{2}z'^2+\frac{\mu^2}{\lambda^2+\mu^2}=0,$$

deci este un hiperboloid cu o pînză.

15. *Se dă un sistem de trei axe rectangulare, un cerc* (Γ) *în planul* xOy *de ecuație*

$$x^2+y^2-R^2=0,\quad z=0 \tag{1}$$

și două drepte (D) *și* (D_1) *de ecuații*

$$(D)\begin{cases}y=0\\ z=x-R;\end{cases}\qquad (D_1)\begin{cases}x=0,\\ z=-y+R.\end{cases}$$

1° *Să se găsească locul geometric al dreptelor care întîlnesc cercul și dreptele* (D) *și* (D_1) *în puncte diferite.*

2° *Să se reducă la forma canonică ecuația locului geometric obținut.*

Soluție.

1° Considerăm fasciculul de plane care trec prin dreapta (D)

$$(F): z-x+R-y=0 \tag{2}$$

și fasciculul de plane ce trece prin (D_1)

$$(F_1): z+y-R-x=0 \tag{3}$$

Vom pune condiția ca planele (F) și (F_1) să întîlnească cercul (Γ).

Din ecuațiile (1), (2) și (3) deducem

$$x=\frac{R(1-\lambda)}{1-\lambda\mu},\quad y=\frac{R(1-\lambda)}{1-\lambda\mu},\quad z=0.$$

Înlocuind aceste valori în prima ecuație (1), obținem

$$\lambda+\mu-1=\pm\lambda\mu \tag{4}$$

Din ecuațiile (2) și (3), obținem

$$\lambda=\frac{1}{y}(z-x+R),\quad \mu=\frac{1}{x}(R-z-y).$$

Înlocuind aceste valori în relația (4), obținem, după cum luăm semnul + sau —, următoarele ecuații:

$$x^2+y^2-z^2-2xy-2Rx-2Rz=0, \tag{5}$$

$$x^2+y^2+z^2-2xz-2yz-R^2=0. \tag{6}$$

În cazul cuadricei (5) avem $\delta=0$, deci cuadrica este de gen paraboloid. Calculînd invarianții Δ și J avem $\Delta=R^2$, $J=-1$

Ecuația în S devine

$$S(S+1)(S-2)=0,$$

deci avem $S_1=0$, $S_2=-1$, $S_3=2$.

Forma canonică a ecuației cuadricei este

$$2x'^2-y'^2=2z' \tag{5'}$$

deci cuadrica (5) este un paraboloid hiperbolic.

În cazul cuadricei (6) avem $\delta=-1$, $\Delta=R^2$.

Cuadrica este deci o cuadrică nedegenerată cu centru.

Ecuația în S are rădăcinile $S_1=1$, $S_{2,3}=1\pm\sqrt{3}$.

Deci, cuadrica are forma canonică

$$x'^2+(1-\sqrt{3})y'^2+(1+\sqrt{3})z'^2-R^2=0, \tag{6'}$$

adică este un hiperboloid cu o pînză.

16. *Fie un parabolid de ecuație*

$$z=2x^2+y^2$$

și (π) *un plan tangent la paraboloid într-un punct* P *al său. Notăm cu* A, B, C, *punctele în care planul* (π) *intersectează axele. Să se afle locul geometric al centrului de greutate al triunghiului* ABC.

Soluție.

Fie $P(p, q, r)$ un punct al paraboloidului, deci

$$r=2p^2+q^2.$$

Planul tangent în P la paraboloid are ecuația

$$4px+2qy-z-r=0.$$

Deci avem

$$A\left(\frac{r}{4p},0,0\right),\ B\left(0,\frac{r}{2q},0\right),\ C(0,0,-r),$$

iar centrul de greutate are coordonatele

$$x=\frac{2p^2+q^2}{12p},\ y=\frac{2p^2+q^2}{6q},\ z=\frac{2p^2+q^2}{2}$$

Acestea reprezintă ecuațiile parametrice ale locului geometric. Eliminînd p, q obținem ecuația implicită a locului sub forma

$$24x^2y^2+(2x^2+y^2)z=0.$$

Locul geometric este deci o suprafață rațională de gradul al patrulea, care este originea ca punct triplu.

17. *Se dau trei axe rectangulare, o parabolă definitivă de ecuațiile*

$$z=0,\quad y^2-2px=0$$

și două puncte A, B simetrice în raport cu planul acestei parabole și avînd drept coordonate (a, b, c), $(a, b, -c)$. Presupunem că dreapta AB nu întîlnește parabola, adică avem $b^2-2pa\neq 0$.

1° *Să se găsească locul geometric al vîrfurilor paraboloizilor conținînd parabola și cele două puncte A, B.*

2° *Să se separe în locul geometric vîrfurile paraboloizilor eliptice de cele ale paraboloizilor hiperbolici.*

Soluție.

1° Ecuația generală a paraboloidului căutat este

$$f(x,y,z)\equiv y^2-\frac{b^2-2pa}{c^2}x^2+2\lambda yz-2px-2\lambda bz=0, \qquad (1)$$

λ fiind un parametru variabil.

Axa acestui paraboloid este paralelă cu Ox; prin urmare, această axă este diametrul conjugat cu planul yOz și are ecuațiile

$$f'_y=0,\ f'_z=0$$

sau

$$y+\lambda z=0, \qquad (2)$$

$$\frac{b^2-2pa}{c^2}z+\lambda y-\lambda b=0. \qquad (3)$$

Obținem ecuația locului geometric al vîrfului eliminînd pe λ între ecuațiile (1), (2) și (3).

Din ecuația (2) se scoate $\lambda = -\frac{y}{z}$ și introducînd această valoare în (1) și (3) se obține un sistem de două ecuații care echivalează cu sistemul următor:

$$y^2 + \frac{b^2 - 2pa}{c^2} z^2 - by = 0, \tag{4}$$

$$by - 2px = 0. \tag{5}$$

Acestea sînt ecuațiile locului geometric.

Prima ecuație reprezintă un cilindru cu generatoarele paralele cu Ox, a cărui directoare este o conică (Γ_1) situată în planul yOz, tangentă la Oz în origine și simetrică în raport cu Oy.

A doua ecuație reprezintă un plan care trece prin Oz. Acest plan intersectează cilindrul (4) după o conică (Γ_2), tangentă la Oz în punctul O și simetrică în raport cu planul xy. Conica (Γ_2) este locul geometric al vîrfurilor paraboloizilor (1). Această conică este o elipsă dacă $b^2 - 2pa > 0$ și o hiperbolă dacă $b^2 - 2pa < 0$.

2° Ecuația (1) se poate scrie

$$(y + \lambda z)^2 - z^2 \left[\frac{b^2 - 2pa}{c^2} + \lambda^2 \right] - 2\lambda bz - 2px = 0,$$

Dacă $b^2 - 2pa > c^2 \lambda^2$, această ecuație reprezintă un paraboloid hiperbolic. Toate punctele elipsei (Γ_2) sînt vîrfuri ale paraboloidului hiperbolic.

Dacă $b^2 - 2pa < c^2 \lambda^2$ paraboloidul este eliptic; în acest caz avem

$$\frac{b^2 - 2pa}{c^2} - \lambda^2 < 0.$$

Dar am văzut că valoarea lui λ în funcție de coordonatele unui punct al locului este $\lambda = -\frac{y}{z}$, deci inegalitatea poate fi scrisă sub forma

$$y^2 + \frac{b^2 - 2pa}{c^2} z^2 < 0.$$

Dacă ținem seama de (4) și presupunînd $b > 0$, obținem $y < 0$.

Conica (Γ_2) este o hiperbolă, ramura acestei curbe tangentă la Oz conține vîrfurile paraboloidului eliptic, iar celaltă ramură vîrfurile paraboloidului hiperbolic.

18. *Două elipse au aceleași axe de simetrie.*

Să se determine locul geometric ale unui punct astfel încît conurile avînd acest punct ca vîrf comun și cele două elipse ca directoare, să fie egale.

Soluție.

Luăm ca axe de coordonate axele elipsei și perpendiculara dusă prin centru pe planul elipsei. Ecuațiile celor două elipse sînt

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \quad z=0;$$

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}-1=0, \quad z=0.$$

Ecuația conului avînd ca bază prima dintre elipse și ca vîrf punctul (α, β, γ) se obține eliminînd pe λ între ecuațiile

$$\frac{(\alpha+\lambda x)^2}{a^2(1+k)^2}+\frac{(\beta+\lambda y)^2}{b^2(1+k)^2}-1=0, \gamma+\lambda=0.$$

Rezultă

$$\frac{(\gamma x-\alpha z)^2}{a^2}+\frac{(\gamma y-\beta z)^2}{b^2}(\gamma-z)^2=0.$$

Ecuația celui de al doilea con este

$$\frac{(\gamma x-\alpha z)^2}{a_1^2}+\frac{(\gamma y-\beta z)^2}{b_1^2}-(\gamma-z)^2=0.$$

Aceste două ecuații sînt egale dacă ecuațiile lor în S, ale celor două conuri, au rădăcinile proporționale.

Ecuția în S a primului con este

$$S^3-\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{a^2}+\frac{\gamma^2}{b^2}-1\right)S^2+\frac{\gamma^2}{a^2b^2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-a^2-b^2)lS-\frac{\gamma^4}{a^2b^2}=0,$$

iar pentru cel de al doilea con se obține o ecuație analogă, prin înlocuirea lui a, b cu a_1, b_1.

Presupunînd pe γ diferit de zero, trebuie să avem

$$\frac{\alpha^2+\gamma^2}{a^2}+\frac{\beta^2+\gamma^2}{b^2}-1=\lambda\left(\frac{\alpha^2+\gamma^2}{a_1^2}+\frac{\beta^2+\gamma^2}{b_1^2}-1\right),$$

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-a^2-b^2}{a^2b^2}=\lambda^2\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-a^2-b^2}{a_1^2b_1^2},$$

$$a_1^2b_1^2=\lambda^3a^2b^2.$$

Ultima ecuație determină pe λ,

$$\lambda=\left(\frac{a_1b_1}{ab}\right)^{3/2},$$

iar cea de a doua ecuație dă

$$\lambda(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-a^2-b^2)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-a_1^2-b_1^2$$

sau, trecînd la coordonate curente,

$$x^2+y^2+z^2+\frac{\lambda(a^2+b^2-a_1^2-b_1^2)}{1-\lambda}=0,$$

deci reprezintă o sferă cu centrul în origine și cu raza $R=\sqrt{\frac{(a^2+b^2)\lambda-a_1^2-b_1^2}{\lambda-1}}$

Ținînd seama de a doua, prima ecuație se scrie

$$\frac{R^2-\beta^2}{a^2}+\frac{R^2-\alpha^2}{b^2}-1=\lambda\left(\frac{R^2-\beta^2}{a_1^2}+\frac{R^2-\alpha^2}{b_1^2}-1\right)$$

sau, trecînd la coordonate curente,

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{\lambda}{b_1^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{\lambda}{a_1^2}\right)y^2=k^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{\lambda}{a_1^2}-\frac{\lambda}{b_1^2}\right)+(\lambda-1), \qquad (1)$$

deci reprezintă un cilindru de gradul al doilea, avînd ca axă axa *Oz*. Locul geometric căutat este deci intersecția unei sfere și a unui cilindru de gradul al doilea, adică este o conică.

Putem presupune că avem $\lambda \leqslant 1$, luînd ca primă elipsă cea care are suprafața mai mare.

Dacă avem $\lambda < 1$, sfera obținută nu este reală decît dacă

$$a_1^2+b_1^2 > \lambda\,(a^2+b^2)$$

sau

$$\frac{(a_1^2+b_1^2)^3}{a_1^2\ b_1^2} > \frac{(a^2+b^2)^3}{a^2\ b^2}.$$

Pentru ca curba obținută să fie reală trebuie ca cilindrul de ecuație (1) să fie real și ca axa mică a sa să fie mai mică decît R.

Cînd avem $\lambda = 1$, cele două elipse au aceeași arie și dacă $a_1^2+b_1^2$ nu este egal cu a^2+b^2 locul geometric este dus la infinit. Cînd $a_1 b_1 = ab$ și $a_1^2+b_1^2=a^2+b^2$ rezultă că avem $a=a_1$, $b=b_1$ sau $a=b_1$, $b=a_1$.

În primul caz, cele două elipse date coincid.

În al doilea caz, cele două elipse sînt egale fără să coincidă. Ecuația sferei devine o identitate, iar cea de a doua ecuație ne dă $\alpha^2=\beta^2$, presupunînd $a \neq b$ căci în caz contrar $a=a_1=b=b_1$.

Deci, locul geometric se compune din planele bisectoare ale diedrului *xOzy*.

19. *Să se determine locul geometric* (Γ) *al punctelor M din spațiu, a căror distanță la planul yOz este într-un raport constant cu distanța la dreapta Ox. Secționînd apoi suprafața* (Γ) *cu două plane paralele cu planele yOz și xOz, să se determine ecuația familiei de cuadrice care trec prin curbele de secțiune. Să se discute natura acestor cuadrice.*

Soluție.

Fie M (α, β, γ) punctul din spațiu. Distanța la planul *yOz* este $d=\alpha$.

Proiecția punctului M pe a axa Ox este punctul N (α, 0, 0), deci distanța de la M la Ox este $\overline{MN}=\sqrt{\beta^2+\gamma^2}$. Condiția din problemă se scrie deci $\beta^2+\gamma^2=k^2\alpha^2$.

Trecînd la coordonate curente x, y, z, ecuația suprafeței S este

$$k^2x^2-y^2-z^2=0.$$

Suprafața (Γ) este deci un con circular cu vîrful în origine.

Secționînd acest con cu planele $x=a$ și $y=b$, obținem curbele

$$y^2+z^2=k^2a^2, \quad x=a \tag{1}$$

și

$$k^2x^2-z^2=b^2, \quad y=b. \tag{2}$$

Ecuația cuadricei care trece prin cercul (1) este

$$y^2+z^2-k^2a^2+(x-a)\ (\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)=0.$$

Punînd condiția ca această cuadrică să treacă prin hiperbola (2), obținem condițiile $\alpha=-k^2$, $\gamma=0$, $\delta=-ak^2-b\beta$.

Deci, familia de cuadrice care trec prin curbele (1) și (2) are ecuația

$$k^2x^2-y^2-z^2-\beta\ (xy-bx-ay+ab)=0$$

sau, punînd $\beta=\lambda$,

$$k^2x^2-y^2-z^2-\lambda\ (x-a)\ (y-b)=0. \tag{3}$$

Calculînd invarianții δ și Δ, obținem

$$\delta=-\frac{4k^2+\lambda}{4}<0, \quad \Delta=-\frac{\lambda}{4}[2ab\ \lambda^2-(k^2a^2-b^2)\lambda+4k^2ab].$$

Dacă $\lambda=0$, cuadrica (3) se reduce la suprafața S.

Dacă $\lambda=\frac{k^2a^2-b^2\mp\sqrt{k^4a^4-34k^2a^2b^2+b^4}}{4ab}$, avem $\Delta=0$ și cuadrica (3) este un con.

Dacă $\lambda\neq 0$, $\frac{k^2a^2-b^2\mp\sqrt{k^4a^4-34k^2a^2b^2+b^4}}{4ab}$, avem $\Delta\neq 0$.

Scriind ecuația în S, obținem rădăcinile

$$S_1=1, \quad S_2=\frac{1-k^2-\sqrt{(1+k^2)^2+\lambda^2}}{2}<-k^2, \quad S_3=\frac{1-k^2+\sqrt{(1+k^2)^2+\lambda^2}}{2}>1$$

și deci cuadrica (3) este un hiperboloid cu o pînză sau cu două pînze, după cum $\lambda[2ab\ \lambda^2-(k^2a^2-b^2)\ \lambda+4k^2\ ab]$ este negativ sau pozitiv.

20. *Față de un sistem de trei axe ortogonale se dau un cerc (C) în planul xOy, tangent în origine la Oy, și un cerc (C') în planul yOz, tangent în origine la Oy.*

1° *Să se formeze ecuația cuadricelor (Γ) care trec prin cercurile (C) și (C').*

2° *Se dă punctul A $(x_0,y_0,0)$ și se consideră curba de contact a conului cu vîrful în A circumscris cuadricei (Γ_1). Să se arate că locul geometric al acestei curbe este o cuadrică (Γ_2).*

3° *Să se determine locul geometric al punctului A astfel încît suprafața (Γ_2) să fie un con. Apoi să se găsească ecuația redusă a acestui con.*

4° *Să se determine locul geometric al punctului A astfel încît cuadrica* (Γ_2) *să fie un paraboloid. Să se găsească apoi ecuația redusă a paraboloidului și să se arate că între parametrii parabolelor principale există o relație independentă de punctul A.*

Soluție.

1° Notînd cu a abscisa centrului cercului (C) și cu b cota centrului (C'), ecuațiile celor două cercuri sînt

$$(C): x^2+y^2-2ax=0, \quad z=0;$$
$$(C'): y^2+z^2-2bz=0, \quad x=0.$$

Avînd în vedere că cuadrica (Γ_1) trece prin cercul (C), rezultă că, dacă în ecuația caudricei facem $z=0$, trebuie să obținem $x^2+y^2-2ax=0$. Deci, ecuația cuadricei este de forma

$$x^2+y^2-2ax+2z(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)=0.$$

Pentru ca cuadrica (Γ_1) să treacă prin cercul (C') trebuie ca, înlocuind în ecuația de mai sus $x=0$, să obținem $y^2+z^2-2bz=0$. Avem deci $\beta=0$, $\gamma=\frac{1}{2}$, $\delta=-b$.

Deci, familia de cuadrice (Γ_1) are ecuația

$$x^2+y^2+z^2+2\alpha xz-2ax-2bz=0.$$

2° Ecuația conului circumscris cuadricei (Γ_1) este

$$(x_0^2+y_0^2-2ax_0)(x^2+y^2+z^2+2\alpha xz-2ax-2bz)-[x(x_0-a)+yy_0+z(\alpha x_0-b)-ax_0]^2=0,$$

deci curba de contact a lui cu cuadrica are ecuațiile

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2\alpha xz-2ax-2bz=0 \\ (x_0-a)x+y_0y+(\alpha x_0-b)z-ax_0=0. \end{cases}$$

Eliminînd pe α între aceste două ecuații obținem

$$(2a-x_0)x^2+x_0y^2+x_0z^2-2y_0xy+2bxz-2bx_0z=0,$$

care este ecuația cuadricei (Γ_2).

3° Pentru ca (Γ_2) să fie un con trebuie ca $\Delta=0$, $\delta\neq 0$. Avem

$$\Delta=b^2(x_0^2+y_0^2-2ax_0), \quad \delta=-x_0(x_0^2+y_0^2-2ax_0+b^2). \tag{1}$$

Deci, locul geometric căutat este cercul (C).

Pentru a găsi ecuația redusă a conului trebuie să rezolvăm ecuația în S:

$$\begin{vmatrix} 2a-x_0-S & -y_0 & b \\ -y_0 & x_0-S & 0 \\ b & 0 & x_0-S \end{vmatrix}=0.$$

Rădăcinile ecuației sînt

$$S_1=x_0,\quad S_{2,3}=\pm\sqrt{(x_0-a)^2+y_0^2+b^2},$$

sau, avînd în vedere că A se află pe cercul (C),

$$S_1=x_0,\qquad S_{2,3}=a\pm\sqrt{a^2+b^2}.$$

Deci, ecuația redusă a conului este

$$x_0x'^2+(a+\sqrt{a^2+b^2})\,y'^2+(a-\sqrt{a^2+b^2})\,z'^2=0.$$

4° Pentru ca (Γ_2) să fie un paraboloid trebuie ca $\delta=0$, $\Delta\neq 0$. Avînd în vedere formulele (1), rezultă că locul geometric căutat este cercul

$$x^2+y^2-2ax+b^2=0.$$

În acest caz, rădăcinile ecuației în S sînt $S_1=0$, $S_2=x_0$, $S_3=2a$, și deci forma redusă a paraboloidului este

$$x_0y'^2+2az'^2-2b^2\sqrt{\frac{x_0}{2a}}\,x'=0$$

sau

$$\frac{y'^2}{\frac{b^2}{x_0}\sqrt{\frac{x_0}{2a}}}+\frac{z'^2}{\frac{b^2}{2a}\sqrt{\frac{x_0}{2a}}}=2x'.$$

Parametrii parabolelor principale sînt

$$p=\frac{b^2}{x_0}\sqrt{\frac{x_0}{2a}},\quad q=\frac{b^2}{2a}\sqrt{\frac{x_0}{2a}}$$

și deci avem relația $pq=\frac{b^4}{4a^2}$, care este independentă de A.

21. *Să se arate că locul geometric al punctelor de intersecție ale generatoarelor hiperboloidului cu pînză*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0, \tag{1}$$

care trec prin extremitățile a două diametre conjugate la elipsa de gîtuire se compune din două elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2=0,\quad z\pm c=0, \tag{2}$$

Să se determine apoi familia de cuadrice care trec prin elipsa de gîtuire și prin una din elipsele (2), făcîndu-se discuția acestor cuadrice.

Soluție.

Ecuația elipsei de gîtuire a hiperboloidului (1) este

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,\quad z=0. \tag{3}$$

Fie $P\,(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi,\ 0)$ un punct de pe această elipsă. Punctul $P'\,(a\cos\theta,\ b\sin\theta,\ 0)$ este conjugat cu P dacă între coordonate avem relația

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=0$$

sau

$$\cos(\theta-\varphi)=0.$$

Deci, $\theta=+\frac{\pi}{2}+\varphi$ și punctul P' are coordonatele $\pm a\sin\varphi\pm b\cos\varphi,\ 0$.

Să considerăm acum cele două sisteme de generatoare ale hiperboloidului

$$(G_1):\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\lambda\left(-1\dfrac{y}{b}\right),\\[2ex] \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda}\left(1+\dfrac{y}{b}\right);\end{cases}\qquad (G_2);\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\mu}\left(1-\dfrac{x}{b}\right),\\[2ex] \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\mu\left(1+\dfrac{y}{b}\right).\end{cases}$$

Punînd condiția ca generatoarea (G_1) să treacă prin punctul P, obținem

$$\lambda=\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}.$$

În mod analog, punînd condiția ca (G_2) să treacă prin punctul P' găsim

$$\mu=\pm\frac{\sin\varphi}{1\pm\cos\varphi}.$$

Pentru a găsi punctul de intersecție al acestor două generatoare trebuie deci să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}\left(1-\dfrac{\lambda}{b}\right),\\[2ex] \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\\[2ex] \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\mp\dfrac{\sin\varphi}{1\pm\cos\varphi}\left(1+\dfrac{y}{b}\right).\end{cases}$$

Din primele două ecuații deducem

$$\frac{x}{a}=\frac{1}{\cos\varphi}-\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cdot\frac{y}{b},\quad \frac{z}{c}=-\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}+\frac{1}{\cos\varphi}\cdot\frac{y}{b},$$

care înlocuite în a treia ecuație ne dau

$$\frac{y}{b}=\frac{1+\sin\varphi\pm\cos\varphi\pm 2\sin\varphi\cos\varphi}{1+\sin\varphi\pm\cos\varphi}.$$

Avînd în vedere că $1\mp 2\sin\varphi\cos\varphi=(\sin\varphi\pm\cos\varphi)$, rezultă

$$\frac{y}{b}=\sin\varphi\pm\cos\varphi$$

și deci

$$\frac{x}{a}=\cos\varphi\pm\sin\varphi,\ \frac{z}{c}=\pm 1.$$

Eliminînd pe φ între $\frac{x}{a}$ și $\frac{y}{b}$, obținem

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2=0,\qquad z=\pm c.$$

Vom determina acum familia de cuadrice care trec prin elipsa (3) și prin una din elipsele (2).

Pentru ca o cuadrică să treacă prin elipsa (2) ea trebuie să fie de forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2+(z\pm c)(\alpha x+\beta y+\gamma z-\delta)=0,$$

Scriind că această cuadrică conține elipsa (3), obținem

$$\alpha=0,\ \beta=0,\ \delta=\pm\frac{1}{2}.$$

Notînd $\gamma=\frac{\lambda}{c^2}$, ecuația familiei de cuadrice se scrie

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{\lambda z^2\pm(\lambda+1)cz}{c^2}-1=0. \tag{4}$$

Calculînd invarianții δ și Δ ai cuadricei (4), obținem

$$\delta=\frac{\lambda}{a^2b^2c^2},\ \Delta=-\frac{\lambda^2+6\lambda+1}{4a^2b^2c^2}.$$

Dacă $\lambda=0$, avem $\delta=0, \Delta<0$ și cuadrica este un paraboloid eliptic de ecuație

$$-\frac{1}{c}(z-c)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},$$

Dacă $\lambda=-3\pm 2\sqrt{2}$ avem $\Delta=0$, $\delta<0$ și cuadrica este un con cu vîrful în punctul $V\ [0,0\pm(1\pm\sqrt{2}),c]$ și având ca axă axa Oz.

Dacă $\lambda\neq 0,\ -3\pm 2\sqrt{2}$, cuadrica (4) este nedegenerată. Ecuația (4) se scrie

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{\lambda}{c^2}\left(z\pm\frac{\lambda+1}{2\lambda}c\right)^2-\frac{\lambda^2+6\lambda+1}{4\lambda}=0. \tag{4'}$$

Dacă $\lambda<-3-2\sqrt{2}$, cuadrica (4') este un hiperboloid cu două pînze.

Dacă $-3-2\sqrt{2}<\lambda<-3+2\sqrt{2}$, cuadrica (4') este un hiperboloid cu o pînză.

Dacă $-3+2\sqrt{2}<\lambda<0$, cuadrica este un hiperboloid cu două pînze.

Dacă $\lambda>0$, cuadrica este un elipsoid.

22. *Se dă un elipsoid și se consideră conul avînd ca bază secțiunea principală a elipsoidului perpendicular pe axa mică*

Acest con intersectează elipsoidul după o curbă situată într-un plan (Q).

1° *Vîrful acestui con se deplasează într-un plan dat (P). Să se găsească locul descris de polul planului (Q) în raport cu elipsoidul.*

2° *Acest loc este o suprafață de ordinul al doilea (Σ). Se cere să se determine pozițiile planului (P) pentru care conul asimptotic al lui (Σ) are trei generatoare paralele cu axele de simetrie ale elipsoidului.*

3° *Planul (P) se deplasează astfel încît suprafața (Σ) satisface condițiile de mai sus. Să se găsească locul focarelor secțiunilor făcute în suprafața (Σ) printr-un plan fix (R), perpendicular pe axa mică a elipsoidului.*

4° *Să se găsească suprafața generată de curbă, locul acestor focare, cînd planul (R) se deplasează paralel cu el însuși.*

Soluție.

1° Ecuația elipsoidului este

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

Conul cu vîrful în punctul $V(\alpha,\beta,\gamma)$ și avînd ca bază elipsa principală $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ a elipsoidului dat are ecuația

$$\Gamma\equiv\frac{(\alpha z-\gamma x)^2}{a^2}+\frac{(\beta z-\gamma y)^2}{b^2}-(z-\gamma)^2=0.$$

Dacă se formează ecuația generală a cuadricelor

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1+\lambda\Gamma=0,$$

care trec prin intersecția conului (Γ) și a elipsoidului, se observă că ea se reduce, pentru $\lambda=-\frac{1}{\gamma^2}$, la perechea de plane $z=0$

și

$$(Q):\ \frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-\frac{z}{2\gamma}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}-1\right)=1^*.$$

Coordonatele polului planului (Q) sînt

$$x_1=\alpha,\ y_1=\beta,\quad z_1=-\frac{c^2}{2\gamma}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}-1\right).$$

* Se obține acest rezultat scriind că discriminantul Δ a coadricei este nul.

Presupunem că (α, β, γ) se deplasează în planul (P) de ecuație

$$lx+my+nz+1=0.$$

Locul punctului (x_1, y_1, z_1) este

$$(\sum): \; z=\frac{c^2n}{2(lx+my+1)}\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{1}{c^2n^2}(lx+my+1)^2-1\right]$$

sau

$$\frac{x^2}{a^2}(c_2n_2-a^2l^2)+\frac{y^2}{b^2}(c^2n^2-b^2m^2)-2mnyz-nlxz-2lmxy-2lx-2my-$$

$$2nz-c^2n^2-1=0$$

2° Conul asimpotic al suprafeței (Σ) are trei generatoare paralele cu axele elipsoidului dacă

$$a^2l^2=b^2m^2=c^2n^2.$$

3° Presupunem că această condiție este îndeplinită și să intersectăm suprafața (Σ) cu planul $z=h$. Avem, pentru proiecția intersecției pe xOy, ecuația

$$2lmxy+2l(1+nh)x+2m(1+nh)y+2nh+c^2n^2+1=0.$$

Focarele acestei conice sînt reprezentate de ecuațiile

$$\begin{cases} l(my+nh+1)\pm m(lx+nh+1)=0 \\ lmxy+(lx+my)(nh+1)+n^2(c^2-h^2)=0. \end{cases}$$

Eliminînd pe l, m, n între aceste relații și

$$al=\pm bm=\pm cn$$

se obține locul geometric al focarelor format din conicele

$$c^2(ay^2-bx^2)+ab(a-b)(c^2-h^2)=0,$$
$$c^2(ay^2+bx^2)-ab(a+b)(c^2-h^2)=0,$$

din planul $z=h$.

4° Cînd h variază se obțin suprafețele generate de cele două curbe și anume un hiperboloid cu o pînză

$$bcx^2-ac^2y^2+ab(a-b)z^2=ab(a-b)c^2.$$

și un elipsoid

$$bc^2+ac^2y^2+ab(a+b)z^2=ab(a+b)c^2.$$

23. *Fie (Γ) o cuadrică și (π_1), (π_2) două plane. Se consideră fasciculul (F) de cuadrice definit de cuadrica (Γ) și de perechea de plane (π_1) și (π_2).*

Să se arate că cuadrica din fasciculul (F) care trece prin polul A al planului (π_1) față de (Γ) trece și prin polul B al planului (π_2) față de (Γ).

Soluție.

Fie o cuadrică (Γ)a cărui ecuație în coordonate omogene este

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$$

și două puncte $A(x_1', x_2', x_3', x_4')$ și $B(x_1'', x_2'', x_3'', x_4'')$.
Planele polare ale punctelor A și B față de (Γ) au ecuațiile

$$(\pi_1): f(x'; x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial f}{\partial x_i'}x_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial f}{\partial x_i}x_i'=0,$$

$$(\pi_2): f(x''; x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial f}{\partial x_i''}x_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial f}{\partial x_i}x_i''=0.$$

Ecuația fasciculului determinat de cuadrica (Γ) și de perechea de plane (π_1), (π_2) este deci

$$f(x)+\lambda f(x'; x)\cdot f(x''; x)=0. \tag{1}$$

Pentru ca această cuadrică să treacă prin punctul A trebuie ca

$$f(x')+\lambda f(x'; x')f(x''; x)=0. \tag{2}$$

Dar

$$f(x'; x')=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial f}{\partial x_i'}x_i'=f(x').$$

Deci, relația (2) devine

$$f(x')+\lambda f(x')f(x''; x')=0.$$

De aici deducem

$$\lambda=-\frac{1}{f(x''; x')}.$$

Ecuația cuadricei din fasciculul (1) care trece prin A este deci

$$F(x)=f(x''; x')f(x)-f(x'; x)f(x''; x)=0. \tag{3}$$

Avem

$$F(x'')=f(x''; x')f(x'')-f(x'; x'')f(x''; x''). \tag{4}$$

Dar

$$f(x'; x'')=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial f}{\partial x_i'}x_i''=f(x''; x').$$

și

$$f(x''; x'')=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial f}{\partial x_i''}x_i''=f(x'').$$

Relația (4) devine

$$F(x'')=0,$$

deci cuadrica (3) trece prin punctul B.

24. *Ce reprezintă ecuația tangențială*

$$\lambda u_1^2-2u_2^2-u_3^2+2u_1u_3+4u_4u_1-2u_4u_2+u_4^2=0\,?\qquad(1)$$

Să i se găsească centrul și să se arate că planul diametral conjugat a lui Oy trece printr-o dreaptă fixă, cînd λ *variază.*

Soluție.

Să descompunem ecuația în sumă de pătrate luînd pe u_4 apoi pe u_3 și pe u_2 ca variabile directoare. Obținem

$$(u_4+2u_1-u_2)^2-(u_3-u_1)^2-\frac{1}{3}(3u_2-2u_1)^2+\left(\lambda-\frac{5}{3}\right)u_1^2=0.\qquad(2)$$

Dacă luăm punctele $u_4+2u_1-u_2=0$, $u_3-u_1=0$, $3u_2-2u_1=0$ ca origine, punctul de la infinit pe axa Oy și punctul de la infinit pe axa Oz, fără a schimba punctul de la infinit pe axa Ox, avem o ecuație redusă la forma

$$U_4^2-U_2^2-U_3^2+\left(\lambda-\frac{5}{3}\right)U_1^2=0.\qquad(3)$$

Dacă $\lambda-\frac{5}{3}\neq 0$, ecuația punctuală corespunzătoare este

$$\frac{X^2}{\lambda-\frac{5}{3}}-Y^2-Z^2+1=0.$$

Dacă $\lambda-\frac{5}{3}>0$, suprafața este un hiperboloid cu o pînză.

Dacă $\lambda-\frac{5}{3}<0$, suprafața este un elipsoid.

Dacă $\lambda-\frac{5}{3}$ obținem o elipsă. Coordonatele planului său anulează cele trei pătrate, de unde rezultă

$$U_2=\frac{2}{3}U_1,\ U_3=U_1,\ U_4=-\frac{4}{3}U_1.$$

Deci, ecuația planului elipsei este

$$x+\frac{2}{3}y+z-\frac{4}{3}=0.\qquad(4)$$

În toate cazurile ecuația tangențială a centrului este

$$u_4+2u_1-u_2=0, \tag{5}$$

iar coordonatele sale sînt 2, —1, 0.

Coordonatele planului diametral conjugat al lui Oy se obțin scriind că polul acestui plan este la infinit pe Oy, ceea ce ne dă ecuațiile

$$u_4+2u_1-u_2=0,\ u_1+u_3+2u_4=0,\ u_1-u_3=0,$$

de unde

$$u_3=u_1,\ u_4=\frac{u_1(1+\lambda)}{2},\ u_2=\frac{3-\lambda}{2}u_1.$$

Ecuația planului diametral este

$$2x+(3-\lambda)y+2z-(1+\lambda)=0.$$

Cînd λ variază acest plan trece prin dreapta fixă

$$y+1=0,\ x+z-2=0.$$

25. *Să se determine natura cuadricei*

$$x^2-2y^2-2z^2+4yz-6zx+2xy+8x-4y+2\lambda z+\lambda^2=0, \tag{1}$$

coordonatele și locul centrului, natura și locul curbei de contact a cilindrului circumscris paralel la dreapta de parametri directori (2, 1—1), locul diametrului conjugat al planului.

$$3x+y-z=0 \tag{2}$$

și punctele de contact ale planelor tangente paralele la acest plan.

Să se separe din toate aceste locuri geometrice punctele care corespund la cuadrice de naturi diferite.

Soluție.

Descompunem membrul întîi al ecuației (1) în sumă de pătrate

$$(x+y-3z+4)^2-\frac{1}{3}(-3y+5z-6)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}z+\lambda+2\right)^2+\frac{\lambda^2-12\lambda-28}{4}=0.$$

Trebuie să determinăm semnul termenului constant.

Trinomul în λ are ca rădăcini pe 14 și —2. Deci, dacă λ este cuprins între —2 și 14 obținem un hiperboloid cu o pînză.

Dacă $\lambda>14$ sau $\lambda<-2$ avem un hiperboloid cu două pînze, iar dacă $\lambda=-2$ sau $\lambda=14$ avem un con real.

Cele trei plane

$$x+y-3z+4=0,\ -3y+5z-6=0,\ \frac{4}{3}z+\lambda+2=0$$

sînt plane diametral conjugate, deci ele se intersectează în centrul C. Se observă că primele două plane sînt independente de λ, iar intersecția

lor (d) este locul geometric al acestor puncte. Cota z este dată de cea de a treia ecuație, apoi y de a doua, iar x de prima. Se obține

$$x=-4-\lambda,\ y=-\frac{9}{2}-\frac{5}{4}\lambda,\ z=-\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\lambda,$$

Cînd λ variază se obțin ecuațiile parametrice ale lui (d).

Dacă notăm cu C_1, C_2 punctele care corespund valorilor $\lambda=-2$, $\lambda=14$, deducem că centrele hiperboloidului cu o pînză sînt punctele segmentului C_1C_2; centrele hiperboloidului cu două pînze sînt punctele exterioare acestui segment, iar vîrfurile celor două conuri sînt C_1, C_2.

Curba de contact a cilindrului circumscris paralel cu direcția (2, 1, —1) este secțiunea (γ) a suprafeței cu planul diametral conjugat acestei direcții, care are ecuația

$$2(x+y-3z+4)+(x-2y+2z-2)-(-3x+2y+2z+2\lambda)=0,$$

sau

$$6x-2y-6z+6-\lambda=0. \qquad (3)$$

Pentru a găsi natura acestei conice îi vom căuta punctele de la infinit.

Să scriem ecuația conicei (γ) în coordonate omogene

$$\begin{cases} x_1^2-2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3-6x_1x_3+x_4(8x_1-4x_2+2\lambda x_3)+\lambda^2x_4^2=0, \\ 6x_1-2x_2-6x_3+(6-\lambda)x_4=0. \end{cases}$$

și s-o intersectăm cu planul impropriu $x_4=0$.

Eliminînd, de exemplu, pe x_2 între ecuațiile astfel obținute rezultă ecuația

$$11x_1^2-36x_1-x_3+28x_3^2=0,$$

care are două rădăcini reale și distincte.

Conica (γ) întîlnește planul impropriu în două puncte reale și distincte, deci ea este o hiperbolă.

Ecuația locului născut de această hiperbolă cînd λ variază se obține eliminînd pe λ între ecuațiile (1) și (3):

$$37x^2+2y^2+26z^2+24yz-66zx-22xy+80x-28y-60z+36=0. \qquad (4)$$

Pentru a recunoaște natura acestei cuadrice, descompunem membrul întîi al acestei ecuații în sumă de pătrate

$$\frac{1}{2}(2y-11x+z12-14)^2-\frac{1}{46}(-46z+33x+54)^2+\frac{4}{23}(x+10)^2-16=0.$$

Locul geometric este un hiperboloid cu o pînză.

Fie (P_1) și (P_2) planele (3) care corespund valorilor $\lambda=-2$, $\lambda=14$.

Zona hiperboloidului (4) cuprinsă între planele (P_1) și (P_2) este locul curbelor de contact ale hiperboloidului cu o pînză dat de (1). Zona

exterioară corespunde hiperboloidului cu două pînze, iar secțiunile prin (P_1), (P_2) corespund conului, ceea ce ne arată că aceste secțiuni trebuie să fie drepte, adică planele care trec prin (P_1), (P_2) sînt tangente la (4).

Diametrul conjugat (Δ) al planului (2) în raport cu (1) are ca ecuație.

$$\frac{x+y-3z+4}{3}=\frac{x-2y+2z-2}{1}=\frac{-3x+2y+2z+\lambda}{-1}.$$

Egalînd primele două rapoarte obținem o ecuație independentă de λ care reprezintă un plan (P), locul geometric al lui (Δ)

$$2x-7y+9z-10=0. \tag{5}$$

Dreapta (Δ) este conținută în planul obținut egalînd ultimele două rapoarte.

$$2x-4z+2-\lambda=0. \tag{6}$$

Pentru $\lambda=-2$ și 14 se obțin două drepte (Δ_1) și (Δ_2); dreapta (Δ) se găsește între acestea, corespunzînd hiperboloidului cu o pînză.

Punctele de contact ale planului tangent paralel la planul (2) sînt la intersecția cuadricei (1) cu dreapta (Δ).

Locul geometric al lor este o curbă (Γ) din planul (P) a cărei ecuație se obține eliminînd pe λ între ecuațiile (1) și (6).

$$5x^2-2y^2+10z^2+4yz-18zx+2xy+16x-4y-12z+4=0. \tag{7}$$

Deci curba (Γ) este o conică.

Pentru a determina natura acestei conice trebuie s-o intersectăm cu planul de la infinit.

Scriem ecuațiile (5) și (7) ale conicei în coordonate omogene

$$\begin{cases} 2x_1-7x_2+9x_3-10x_4=0, \\ 5x_1^2-2x_2^2+20x_3^2+4x_2x_3-18x_3x_1+2x_1x_2+16x_1x_4-4x_2x_4- \\ \qquad -12x_3x_4+4x_4^2=0. \end{cases}$$

Intersectînd cu $x_4=0$ și eliminînd una din variabilele x_1, x_2, x_3, de exemplu x_1, obținem ecuația

$$265\,x_2^2-902\,x_2x_3+769\,x_3^2=0,$$

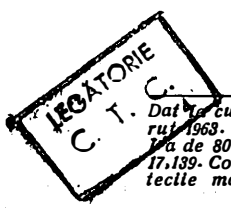
care are rădăcini imaginare. Deci, conica (7) este o elipsă.

Bibliografie

1. Arghiriade E. — *Curs de algebră superioară*, vol. I, Ed. de stat didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1962.
2. Abramescu N., — *Lecţiuni de geometrie analitică*, Cluj 1927.
3. Ciorănescu N., Roşculeţ M., — *Culegere de probleme de algebră şi analiză matematică*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1959.
4. Creangă I. ş.a., — *Curs de geometrie analitică*, Ed. tehnică, Bucureşti 1951.
5. Fadeev D. K., Sominski I.S., — *Culegere de probleme de algebră superioară* (trad. din l. rusă) Ed. tehnică, Bucureşti, 1954.
6. Gheorghiu Gh. Th., — *Elemente de algebră şi geometrie analitică*, Ed. de stat didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1961.
7. Ghiunter N. M., Kuzmin R. O., — *Culegere de probleme de matematici superioare*, (trad. din l. rusă), Ed. tehnică, Bucureşti. 1953.
8. Iacob C., — *Curs de matematici superioare*, Ed. tehnică Bucureşti 1957.
9. Kletenik D. V., — *Sbornik zadaci po analiticeskoi geometrii*, Gos. iz. teh.-teoc. lit., Moskva. 1954.
10. Kocin N. E., — *Calculul vectorial şi introducerea în calcul tensorial*, (trad. din l. rusă), Ed. tehnică, Bucureşti, 1954.
11. Ladon I. F. — *Bazele calculului vectorial* (trad. din l. rusă), Ed. de stat, Bucureşti, 1949.
12. Lalescu T., — *Tratat de geometrie analitică*, Bucureşti, 1938.
13. Myller-Lebedev V., — *Lecţii de algebră superioară*, Ed. Acad. R.P.R., 1953.
14. Popoviciu T., — *Curs de algebră superioară*, Cluj 1938.
15. Postelnicu T., Stoka M., Vrănceanu G. G., — *Culegere de probleme de geometrie analitică şi proiectivă*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1962.
16. Teodorescu N., — *Metode vectoriale în fizica matematică*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1954.
17. Ţiţeica G., — *Culegere de probleme de geometrie analitică*, Bucureşti, 1932.
18. Tuberbiller O. N., — *Probleme şi exerciţii de geometrie analitică*, (trad. din l. rusă), Ed. tehnică, Bucureşti, 1952.
19. Villa M., — *Exercizii di geometria*, Bologna, 1962.
20. Vrănceanu G., — *Geometrie analitică, proiectivă şi diferenţială*, Ed. de stat didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1962

Tabla de materii

		Pag.
	Prefață	3
Cap. I.	Elemente de algebră liniară	5
Cap. II.	Dreapta în plan	38
Cap. III.	Dreapta și planul în spațiu	72
Cap. IV.	Algebră vectorială	105
Cap. V.	Cercul și conicele pe ecuații reduse	140
Cap. VI.	Teoria generală a conicelor	174
Cap. VII.	Sfera și cuadricele pe ecuații reduse	230
Cap. VIII.	Teoria generală a cuadricelor	258
	Bibliografie	295



Tehnoredactor : BĂLĂIȚĂ TITEL

Dat la cules 25.09.1963. Bun de tipar 5.12.1963. Apărut 1963. Tiraj 1000+120 ex. pînză ; Hîrtie scris tip IIIa de 80 gm². Format 16170×100. Coli editoriale 17,139. Coli de tipar 18,50 A. 9210. C. Z. pentru bibliotecile mari 516+512-8(075.8) C. Z. pentru bibliotecile mici 51.

Tiparul executat la Intreprinderea Poligrafică Oltenia, Craiova, str. Mihai Viteazu nr. 4. — R. P. R. Comanda 3200